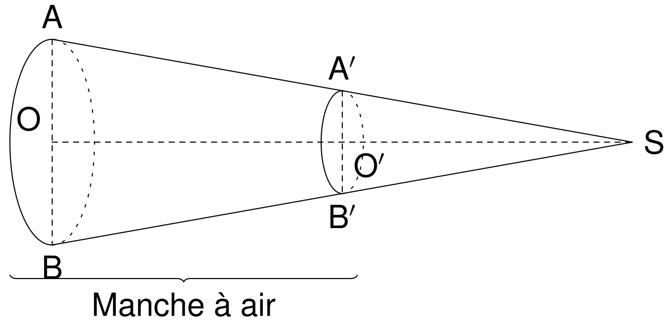
Sur l'altiport (aérodrome d'altitude) de la station de ski se trouve une manche à air qui permet de vérifier la direction et la puissance du vent.

Cette manche à air à la forme d'un tronc de cône de révolution obtenu à partir d'un cône auquel on enlève la partie supérieure, après section par un plan parallèle à la base.



On donne : AB = 60 cm, A′B′ = 30 cm, BB′ = 240 cm.
O est le centre du disque de la base du grand cône de sommet S.
O′ milieu de [OS], est le centre de la section de ce cône par un plan parallèle à la base.
B′ appartient à la génératrice [SB] et A′ appartient à la génératrice [SA].

1. Démontrer que la longueur SB est égale à 480 cm.
2. Calculer la longueur SO. On arrondira le résultat au centimètre.
3. Calculer le volume d'air qui se trouve dans la manche à air.

   On arrondira au centimètre cube.

On rappelle les formules du volume d'un cône et l'aire d'un disque de rayon R :

$V_{\text{cône}} = \dfrac{1}{3} \times$ aire de la base $\times$ hauteur et $A_{\text{disque}} = \pi \times \text{R}^2$

Correction

1. Le grand cône est un agrandissement du petit cône de coefficient
   $k = \dfrac{\text{AB}}{\text{A}'\text{B}'} = \dfrac{60}{30} = 2$, donc SB = 2SB′ et SB′ = BB′ = 240 cm.
   Par conséquent, SB $= 2\times$SB′ $= 2 \times 240 = 480$ cm.

2. Le triangle SOB est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore, on a :
   $\text{SB}^2 = \text{SO}^2 + \text{OB}^2$
   $480^2 = \text{SO}^2 2 + 30^2$
   $230{,}400 = \text{SO}^2 + 900$
   $\text{SO}^2 = 230{,}400 - 900$
   $\text{SO}^2 = 229{,}500$
   SO > 0, donc SO $= \sqrt{229{,}500}$
   SO ≈ 479 cm.

3. Je commence par exprimer le volume du grand cône :
   $V_{\text{grand cône}} = \dfrac{30^2 \times \pi \times \sqrt{229{,}500}}{3} \approx 451{,}505$ cm^3.
   Le petit cône est une réduction du grand cône de coefficient $\dfrac{1}{2}$, son volume est donc :
   $V_{\text{petit cône}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \times V_{\text{grand cône}} \approx 56{,}438$ cm^3.
   On en déduit le volume du manche à air :
   $V_{\text{manche à air}} = V_{\text{grand cône}} - V_{\text{petit cône}} \approx 451{,}505 - 56{,}438$, soit $V_{\text{manche à air}} \approx 395{,}067$ cm^3.