

Exercice 4

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 cm.

Partie A

On considère les points de l'espace $R(1; 0; 6)$, $S(1; 3; 2)$, $T(3; 5; 7; 5)$ et $A(-2; 5; 8; 4, 5)$.

1. Démontrer que les points R, S et T ne sont pas alignés.
2. (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (RST).
(b) En déduire une équation cartésienne du plan (RST).
3. (a) Vérifier que la point A n'appartient pas au plan (RST).
(b) On note d_1 la droite passant par le point A et orthogonale au plan (RST).
Déterminer une représentation paramétrique de la droite d_1 .
(c) Soit le point H projeté orthogonal de A sur (RST).
Vérifier que ses coordonnées sont $(2, 5; 6; 3)$.
4. (a) Démontrer que le triangle RST est rectangle en S.
(b) Vérifier que le volume du tétraèdre ARST est égal à $\frac{625}{24} \text{ cm}^3$.
On rappelle que le volume du tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

Partie B

Soit $M(x; y; z)$ un point de la droite d_2 de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4,5 + s \\ y = 4 - 4s \\ z = 5,5 - 2s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

1. Démontrer que $AM^2 = 21s^2 + 24s + 21$.
2. Déterminer les coordonnées du point M de la droite d_2 pour lesquelles la distance AM est minimale.