

Exercice PCM (2 points)

Isolation écologique

Le chanvre est l'un des plus anciens isolants au monde. Plébiscité pour ses qualités thermiques et acoustiques, il est encore régulièrement utilisé aujourd'hui.

D'après <https://www.izi-by-edf-renov.fr/blog/isolation-chanvre>

On souhaite contrôler la qualité d'isolation d'une plaque de laine de chanvre. On dispose pour cela d'un fluxmètre permettant de mesurer le flux thermique à travers la plaque lorsque ses deux faces sont maintenues à des températures différentes : la face « chaude » à une température θ_1 et la face « froide » à une température θ_2 .

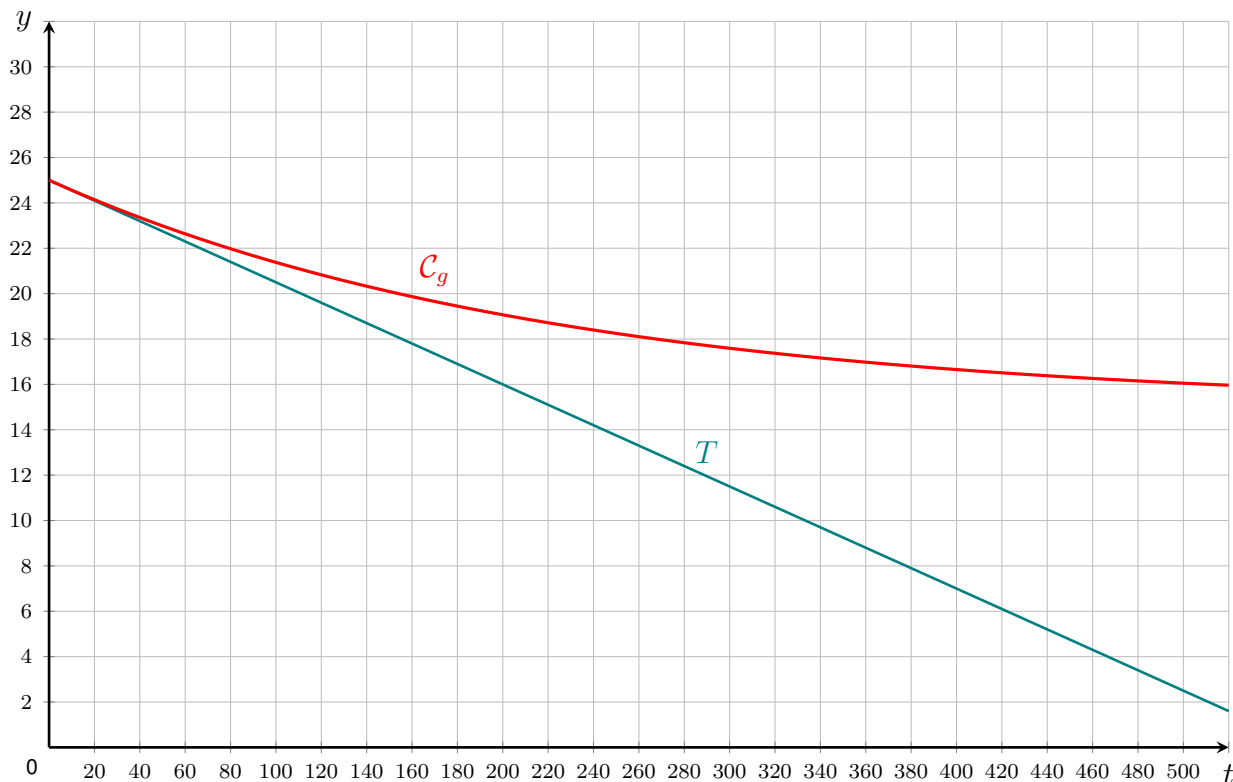
Le système permettant le maintien de la température de la face « chaude » à 25°C est arrêté.

On modélise l'évolution de la température (en $^\circ\text{C}$) de la face « chaude » au cours du temps par une fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = 10e^{-0.004,5t} + 15$, où t est le temps exprimé en seconde.

5. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)$.

6. Montrer que pour tout t de $[0; +\infty[$, $g'(t) = -0,045e^{-0.004,5t}$, où g' est la fonction dérivée de la fonction g .

La courbe représentative de la fonction g (notée C_g) ainsi que sa tangente T au point d'abscisse 0 sont représentées dans le repère ci-dessous.



On admet que la tangente T a pour équation $y = -0,045t + 25$.

On appelle τ l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec la droite d'équation $y = 15$.

7. Justifier que 220 est une valeur approchée de τ à 10 secondes près.

8. Donner une valeur approchée de $g(1,100)$ à 10^{-3} près.

En physique, on estime qu'à partir d'un temps supérieur à 5τ , la température obtenue est une bonne approximation de la température limite.

9. Indiquer si le modèle vérifie ce critère.

Exercice maths (4 points)

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes.

Question 1

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -2y + 90$ où y est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et y' sa dérivée.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

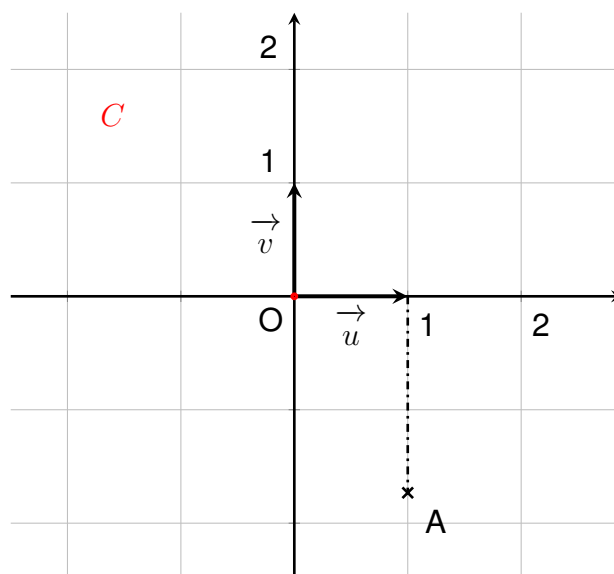
2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Donner l'expression de la solution de (E) dont la courbe représentative dans ce repère passe par le point de coordonnées $(0; 30)$.

Question 2

Le cercle C de centre O et de rayon 2 est représenté ci-dessous, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Le point A d'abscisse 1 appartient au cercle C ; on note z_A l'affixe du point A .



Donner la forme exponentielle de z_A . Aucune justification n'est attendue.

Question 3

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x+2}{e^x}$$

1. On note g' la fonction dérivée de la fonction g . Montrer que pour tout x réel,

$$g'(x) = \frac{-1-x}{e^x}$$

2. En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Question 4

1. Simplifier, en détaillant vos calculs, l'expression :

$$A = \ln \left(\frac{e^4}{e^{-2}} \right)$$

2. Montrer, en détaillant vos calculs, que :

$$\ln \left(\frac{9}{4} \right) + \ln \left(\frac{8}{3} \right) = \ln(6)$$