

Exercice 1

4 points

Un supermarché dispose d'un stock de tomates provenant de deux fournisseurs A et B.

Il a été constaté que :

- 91 % du stock de tomates est commercialisable ;
- 60 % du stock de tomates provient du fournisseur A ;
- parmi les tomates provenant du fournisseur A , la proportion de tomates commercialisables est de 95 %.

On choisit au hasard une tomate dans le stock.

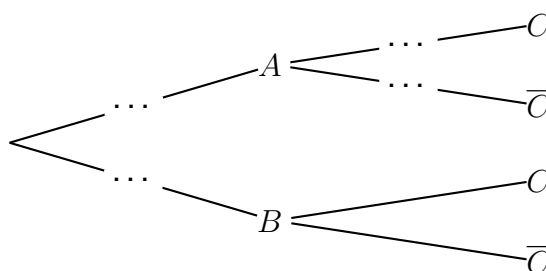
On désigne par :

- A l'évènement « La tomate provient du fournisseur A » ;
- B l'évènement « La tomate provient du fournisseur B » ;
- C l'évènement « La tomate est commercialisable ».

Pour un évènement quelconque E , on note $P(E)$ la probabilité de E .

Partie A

1. Recopier l'arbre ci-dessous en complétant les pointillés.



2. (a) Déterminer la probabilité que la tomate choisie soit commercialisable et provienne du fournisseur A
- (b) Démontrer que $P_B(C) = 0,85$.
- (c) La tomate choisie est non commercialisable. Le responsable des achats estime qu'il y a deux fois moins de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B. A-t-il raison ?

Partie B

On rappelle que 9 % des tomates du stock ne sont pas commercialisables.

- On prend 15 tomates dans le stock au hasard et de manière indépendante. On considère que le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables dans cet échantillon de 15 tomates.

- On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. En préciser les paramètres.
- Déterminer la probabilité qu'exactement deux tomates soient non commercialisables.
On donnera la valeur arrondie au millièème.
- Déterminer la probabilité qu'au plus deux tomates soient non commercialisables.
On donnera la valeur arrondie au millièème.

- On constitue désormais un échantillon de n tomates, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel non nul.

On note X_n , la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables et F_n la variable aléatoire égale à la fréquence de tomates non commercialisables dans cet échantillon de n tomates.

On a donc $F_n = \frac{X_n}{n}$.

On admet que la variable aléatoire X_n , suit la loi binomiale de paramètres n et 0,09.

- Calculer l'espérance $E(F_n)$ et exprimer la variance $V(F_n)$ en fonction de n .
- Démontrer que $P(0,04 < F_n < 0,14) \geq 1 - \frac{32,76}{n}$.
- Le responsable des achats prélève dans le stock un échantillon de 500 tomates. Il s'aperçoit que 55 tomates ne sont pas commercialisables.
Est-ce conforme à ce qu'il pouvait attendre ? Justifier la réponse.

Exercice 2

6 points

Partie A: étude du sens de variation d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

- Résoudre l'équation $f(x) = x$.

- (a) On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Vérifier que, pour tout réel x , on a $f'(x) = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

- En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. Le but de cette question est de retrouver par une autre méthode les résultats de la question 2. de la **partie B**.

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$$

On admet que la suite (v_n) est bien définie.

- (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 4 dont on précisera le premier terme.
- (b) En déduire une expression de v_n en fonction de n puis que $u_n = \sqrt{\frac{1,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n}}$ pour tout entier naturel n .
- (c) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Partie C : étude de la convergence de la somme de termes

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2$.

1. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci permette de lister les p premiers termes de la suite (S_n) .

```
from math import*

def termes(p) :
    u = ...
    S=0
    L= [ ]
    for i in range(p)
        S=...
        u= ...
        L.append(S)
    return L
```

Remarque : on rappelle qu'en langage Python,

- la commande `L= [ ]` crée une liste vide ;

- la commande `L.append (S)` ajoute, à la fin de la liste `L`, l'élément supplémentaire `S`.
2. On rappelle que, pour tout entier naturel k , on a $1 \leq u_k \leq \sqrt{3}$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $n \leq S_n \leq 3n$.
3. En déduire les limites respectives de S_n et de $\frac{S_n}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- les points $A(4; 2; 2)$, $B(5; -2; 3)$ et $C(1; 1; 1)$;
- la droite Δ dont une représentation paramétrique est donnée par

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

- le plan $\mathcal{P}$ contenant le point A et perpendiculaire à la droite Δ .

- Vérifier que la droite Δ contient le point $C(1; 1; 1)$ mais pas le point A .
- (a) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan est $2x + y + 2z - 14 = 0$.
(b) Vérifier que le plan $\mathcal{P}$ contient le point B mais pas le point C .
- On considère le point $D(3; 2; 3)$.
(a) Démontrer que le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathcal{P}$.
(b) Justifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
(c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
(d) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur relative à cette base.

- On appelle H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) .
(a) Vérifier que les coordonnées du point H sont $\left(\frac{73}{29}; \frac{-4}{29}; \frac{51}{29}\right)$.
(b) Démontrer que l'aire du triangle ABC est $\frac{3\sqrt{22}}{2}$.
(c) En déduire la distance du point D au plan (ABC) .

Exercice 4

5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x(\ln x)^2.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = x \ln x$.
 - (a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) = 4(g(\sqrt{x}))^2$.
 - (b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
3. Dans cette question, on étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - (a) Démontrer que sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = (\ln x)(2 + \ln x)$.
 - (b) En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - (c) Donner la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; 1]$.
4. On considère l'équation $f(x) = 2$.
 - (a) Justifier que, sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, cette équation admet une unique solution. On note α cette solution.
 - (b) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.
5. Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0 ; 1]$.
 - (a) Donner une interprétation géométrique de $\int_a^1 f(x) dx$.
 - (b) À l'aide d'une intégration par parties, justifier que :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_a^1 x \ln x dx.$$

- (c) En utilisant à nouveau une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2} \ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}.$$

- (d) Déterminer la limite de $\int_a^1 f(x) dx$ quand a tend vers 0.