

Exercice 1

5 points

On dispose d'un sac et de deux urnes A et B.

- Le sac contient 4 boules : 1 boule avec la lettre A et 3 boules avec la lettre B.
- L'urne A contient 5 billets : 3 billets de 50 euros et 2 billets de 10 euros.
- L'urne B contient 4 billets : 1 billet de 50 euros et 3 billets de 10 euros.

Un joueur prend au hasard une boule dans le sac :

- si c'est une boule avec la lettre A, il prend au hasard un billet dans l'urne A.
- si c'est une boule avec la lettre B, il prend au hasard un billet dans l'urne B.

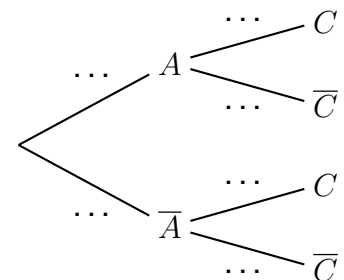
On note les évènements suivants :

- A : le joueur obtient une boule avec la lettre A.
- C : le joueur obtient un billet de 50 euros.

1. Recopier et compléter l'arbre ci-contre représentant la situation.

2. Quelle est la probabilité de l'évènement « le joueur obtient une boule avec la lettre A et un billet de 50 € » ?

3. Démontrer que la probabilité $P(C)$ est égale à 0.337,5.



4. Le joueur a obtenu un billet de 10 euros.

L'affirmation « Il y a plus de 80 % de chances qu'il ait au préalable obtenu une boule avec la lettre B » est-elle vraie ? Justifier.

5. On note X_1 la variable aléatoire qui donne la somme, en euros, obtenue par le joueur.

Exemple : si le joueur obtient un billet de 50 €, on a $X_1 = 50$.

Montrer que l'espérance $E(X_1)$ est égale à 23,50 et que la variance $V(X_1)$ est égale à 357,75.

6. Après avoir remis la boule dans le sac et le billet dans l'urne où il a été pris, le joueur joue une deuxième partie. On note X_2 la variable aléatoire qui donne la somme obtenue par le joueur lors de cette deuxième partie.

On note Y la variable aléatoire ainsi définie : $Y = X_1 + X_2$.

(a) Montrer que $E(Y) = 47$.

(b) Expliquer pourquoi on a $V(Y) = V(X_1) + V(X_2)$

7. Le joueur joue de même une troisième, une quatrième, ..., une centième partie.

On définit donc de la même façon les variables aléatoires $X_3, X_4, \dots, X_{100}$.

On note Z la variable aléatoire définie par $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$.

Démontrer que la probabilité que Z appartienne à l'intervalle $]1,950 ; 2,750[$ est supérieure ou égale à 0,75.

Exercice 2

4 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(4 ; -4 ; 4), \quad B(5 ; -3 ; 2), \quad C(6 ; -2 ; 3), \quad D(5 ; 1 ; 1)$$

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B .

2. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x - y - 8 = 0.$$

3. On note d la droite passant par le point D et orthogonale au plan (ABC).

(a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d .

(b) On note H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

Déterminer les coordonnées du point H .

(c) Montrer que $DH = 2\sqrt{2}$.

4. (a) Montrer que le volume de la pyramide ABCD est égal à 2.

On rappelle que le volume V d'une pyramide se calcule à l'aide de la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base de la pyramide et h la hauteur correspondante.

(b) On admet que l'aire du triangle BCD est égale à $\frac{\sqrt{42}}{2}$.

En déduire la valeur exacte de la distance du point A au plan (BCD).

Exercice 3

6 points

On considère n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n e^{1-x}.$$

On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0 ; 1]$ et on note f'_n sa fonction dérivée.

Partie A

Dans cette partie on étudie le cas où $n = 1$.

On étudie donc la fonction f_1 définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f_1(x) = x e^{1-x}.$$

1. Montrer que $f'_1(x)$ est strictement positive pour tout réel x de $[0 ; 1[$.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
3. En déduire que l'équation $f_1(x) = 0,1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) \, dx \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} \, dx.$$

On admet que $u_1 = e - 2$.

1. (a) Justifier que pour tout $x \in [0 ; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n$$

.

- (b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

- (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

2. (a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

- (b) On considère le script Python ci-dessous définissant la fonction `suite()` :

```
from math import exp

def suite():
    u = ...
    for n in range (1, ...):
        u = ...
    return
```

Recopier et compléter le script Python ci-dessus pour que la fonction `suite()` renvoie la valeur de $\int_0^1 x^8 e^{1-x} dx$.

3. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

- (b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 4

5 points

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est **vraie** ou **fausse**, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) - x^2.$$

Affirmation 1 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2. On considère l'équation différentielle

$$(E) : -2y' + 3y = \sin x + 8 \cos x.$$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2 \cos x - \sin x.$$

Affirmation 2 : La fonction f est solution de l'équation différentielle (E) .

3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(3x + 1) + 8.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 25$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = g(u_n).$$

On admet que la suite (u_n) est strictement positive.

Affirmation 3 : La suite (u_n) est décroissante.

4. On considère une fonction affine h définie sur $\mathbb{R}$.

On note k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = x^4 + x^2 + h(x)$.

Affirmation 4 : La fonction k est convexe sur $\mathbb{R}$.

5. Une anagramme d'un mot est le résultat d'une permutation des lettres de ce mot.

Exemple : le mot BAC possède 6 anagrammes : BAC, BCA, ABC, ACB, CAB, CBA.

Affirmation 5 : Le mot EULER possède 120 anagrammes.