

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée

Exercice 1

5 points

Dans tout l'exercice, les probabilités seront, si nécessaire, arrondies à 10^{-3} près.

Une donnée binaire est une donnée qui ne peut prendre que deux valeurs: 0 ou 1.

Une donnée de ce type est transmise successivement d'une machine à une autre.

Chaque machine transmet la donnée reçue soit de manière fidèle, c'est-à-dire en transmettant l'information telle qu'elle l'a reçue (1 devient 1 et 0 devient 0), soit de façon contraire (1 devient 0 et 0 devient 1).

La transmission est fidèle dans 90 % des cas, et donc contraire dans 10 % des cas.

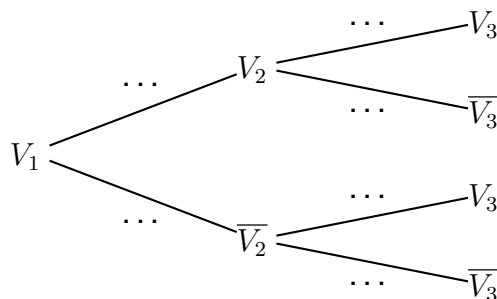
Dans tout l'exercice, la première machine reçoit toujours la valeur 1.

Partie A

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note :

- V_n l'évènement : la n -ième machine détient la valeur 1 ;
- $\overline{V}_n$ l'évènement : la n -ième machine détient la valeur 0 .

1. (a) Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



(b) Démontrer que $P(V_3) = 0,82$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

(c) Sachant que la troisième machine a reçu la valeur 1, calculer la probabilité que la deuxième machine ait aussi reçu la valeur 1.

2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note $p_n = P(V_n)$.

La première machine a reçu la valeur 1, on a donc $p_1 = 1$.

(a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$p_{n+1} = 0,8p_n + 0,1.$$

(b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5.$$

(c) Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Pour modéliser en langage Python la transmission de la donnée binaire décrite en début d'exercice, on considère la fonction `simulation` qui prend en paramètre un entier naturel n qui représente le nombre de transmissions réalisées d'une machine à une autre, et qui renvoie la liste des valeurs successives de la donnée binaire.

On donne ci-dessous le script incomplet de cette fonction.

On rappelle que l'instruction `rand()` renvoie un nombre aléatoire de l'intervalle $[0 ; 1[$.

```
def simulation(n):  
    donnee = 1  
    liste = [donnee]  
    for k in range(n):  
        if rand() < 0.1:  
            donnee = 1 - donnee  
        liste.append(donnee)  
    return liste
```

Par exemple, `simulation(3)` peut renvoyer `[1, 0, 0, 1]`. Cette liste traduit :

- qu'une donnée binaire a été successivement transmise trois fois entre quatre machines;
- la première machine qui détient la valeur 1 a transmis de façon contraire cette donnée à la deuxième machine ;
- la deuxième machine a transmis la donnée qu'elle détient de façon fidèle à la troisième ;
- la troisième machine a transmis de façon contraire la donnée qu'elle détient à la quatrième.

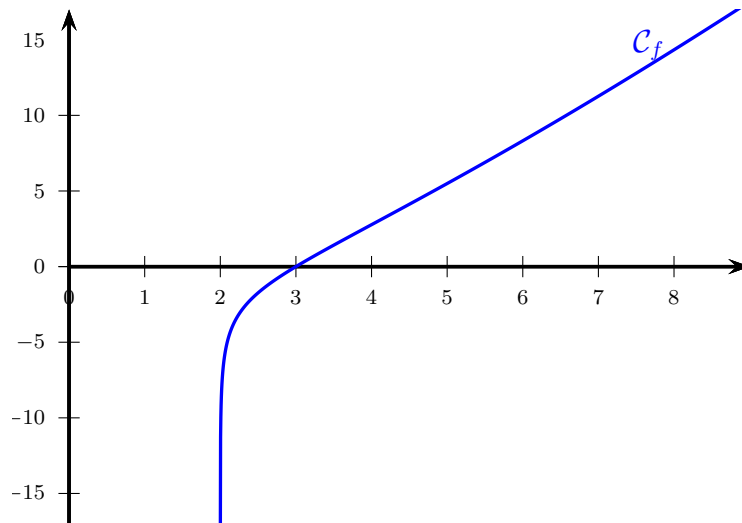
1. Déterminer le rôle des instructions des lignes 5 et 6 de l'algorithme ci-dessus.
2. Calculer la probabilité que `simulation(4)` renvoie la liste `[1, 1, 1, 1, 1]` et la probabilité que `simulation(6)` renvoie la liste `[1, 0, 1, 0, 0, 1, 1]`.

Exercice 2**5 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x - 2).$$

Une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Conjecturer, à l'aide du graphique, le sens de variation de f ses limites aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les éventuelles asymptotes.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]2 ; +\infty[$.
3. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$.

Ce résultat confirme-t-il l'une des conjectures faites à la question 1. ?

4. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2 ; +\infty[$:

$$f'(x) = \ln(x - 2) + \frac{x}{x - 2}.$$

5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]2 ; +\infty[$ par $g(x) = f'(x)$.

- (a) Démontrer que pour tout x appartenant à $]2 ; +\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{x - 4}{(x - 2)^2}.$$

- (b) On admet que $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} g(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

En déduire le tableau des variations de la fonction g sur $]2 ; +\infty[$. On fera apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction g .

- (c) En déduire que, pour tout x appartenant à $]2 ; +\infty[$, $g(x) > 0$.
- (d) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]2 ; +\infty[$.
6. Étudier la convexité de la fonction f sur $]2 ; +\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f .
7. Combien de valeurs de x existe-t-il pour lesquelles la courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur égal à 3 ?

Exercice 3

5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points suivants:

$$A(1; 3; 0), \quad B(-1; 4; 5), \quad C(0; 1; 0) \quad \text{et} \quad D(-2; 2; 1).$$

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.
2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
3. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - (a) Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
 - (b) Justifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne:

$$2x - y + z + 1 = 0.$$

- (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .
4. On appelle H le point de coordonnées $(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3})$.
Vérifier que H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
5. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}B \times h$, où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est sa hauteur relative à cette base.
 - (a) Montrer que $DH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.
 - (b) En déduire le volume du tétraèdre ABCD.
6. On considère la droite d de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = -3k \\ z = 1 + k \end{cases} \quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice 4

5 points

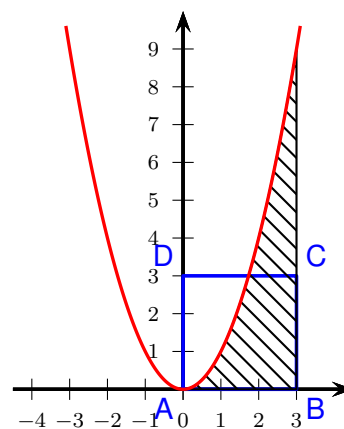
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soient E et F les ensembles $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7\}$ et $F = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\}$.

Affirmation 1 : Il y a davantage de 3-uplets d'éléments distincts de E que de combinaisons à 4 éléments de F .

2. Dans le repère orthonormé ci-contre, on a représenté la fonction carré, notée f , ainsi que le carré ABCD de côté 3.

Affirmation 2 : La zone hachurée et le carré ABCD ont la même aire.



3. On considère l'intégrale J ci-dessous :

$$J = \int_1^2 x \ln(x) dx.$$

Affirmation 3 : Une intégration par parties permet d'obtenir: $J = \frac{7}{11}$.

4. Sur $\mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle

$$(E) : y' = 2y - e^x.$$

Affirmation 4 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle (E) .

5. Soit x donné dans $[0 ; 1[$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = (x - 1)e^n + \cos(n).$$

Affirmation 5 : La suite (u_n) diverge vers $-\infty$.