

Exercice 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-1; 1; 1)$, $B(1; -6; -1)$ et $C(-5; 2; 3)$.

1. a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
- b. Démontrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
- c. En déduire que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :

$$6x - 2y + 13z - 5 = 0.$$

1. On considère le plan (P) d'équation cartésienne $8x - 2y - 4z + 18 = 0$.

On admet que deux plans sont perpendiculaires si leurs vecteurs normaux respectifs sont orthogonaux.

Démontrer que les plans (ABC) et (P) sont perpendiculaires.

2. Soit (d) une droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -4 + t \\ y = -11 + 6t \\ z = 2 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que la droite (d) intersecte le plan (ABC) en un unique point qu'on nommera E, et qui a pour coordonnées $E(-3; -5; 1)$.

4. Soit $H(-2; 1; 0)$.
 - a. Montrer que H est le projeté orthogonal de A sur (d).
 - b. En déduire la distance du point A à la droite (d).
 - c. Montrer que le triangle AHE est rectangle et que son aire est égale à $\sqrt{19}$ unités d'aire.