

Exercice 2

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout $x \in [4 ; 10]$ par $f(x) = \ln(8x^3 - 1)$.

On admet que la fonction f est dérivable sur $[4 ; 10]$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Montrer pour tout $x \in [4 ; 10]$, on a :

$$f'(x) = \frac{24x^2}{(2x-1)(4x^2+2x+1)}.$$

2. a. En déduire que f est croissante sur $[4 ; 10]$.

b. Montrer que, pour tout $x \in [4 ; 10]$, on a :

$$4 \leq f(x) \leq 10.$$

3. On définit la fonction g définie pour tout $x \in [4 ; 10]$ par $g(x) = f(x) - x$.

On admet que g est strictement décroissante sur son ensemble de définition.

a. Montrer que, sur l'intervalle $[4 ; 10]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

b. Déterminer un encadrement à 10^{-3} près de α .

Partie B

On admet qu'on peut définir la suite (u_n) par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction étudiée à la partie A.

1. Donner une valeur approchée de u_1 à 10^{-1} près.

2. a. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. Montrer que la suite (u_n) converge vers le nombre α , défini dans la partie A.

Partie C

Dans cette partie, on admet que $8,4 \leq \alpha \leq 8,5$.

On a créé, en langage Python, la fonction `alpha` suivante.

On précise qu'en langage Python, l'instruction `log` correspond à $\ln$.

```
def f(x) :
    return log(8*x**3 - 1)

def alpha(a):
    n = 0
    u = 5
    while u < a:
        u = f(u)
        n = n + 1
    return n
```

- On admet que `alpha(8.499)` renvoie la valeur 11.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
- Un utilisateur exécute `alpha(8.6)`.
Expliquer pourquoi aucune valeur n'est alors renvoyée.