

Exercice 4

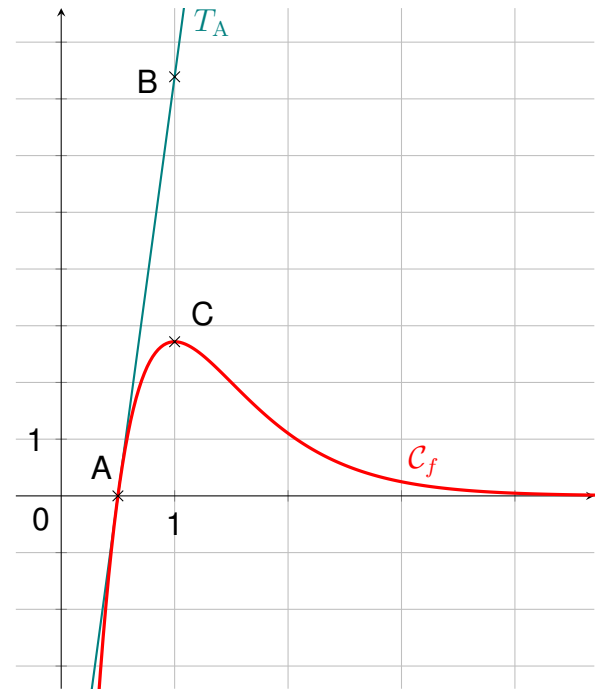
Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ dont on donne ci-dessous une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal.

On note f' sa fonction dérivée.

On précise que :

- la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point C d'abscisse 1;
- la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ passe par le point $B(1; e^2)$.

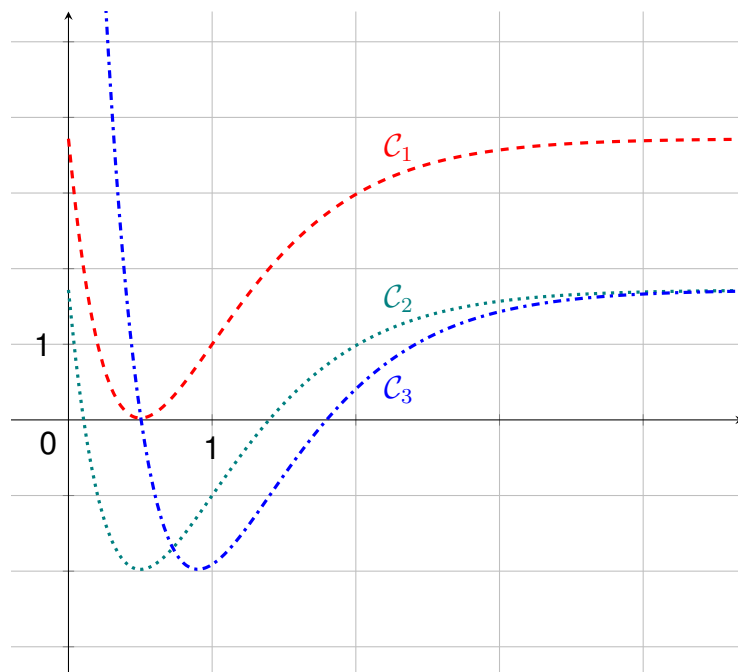


1. À l'aide du graphique ci-contre :

- Donner $f'(1)$.
- Donner la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0; 3]$.

2. Déterminer $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. Parmi les trois courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ ci-dessous, deux représentent des primitives de la fonction f . Indiquer lesquelles et justifier.



Partie B

Un industriel doit créer un logo représentant la forme ci-contre (Fig. 1).

La dimension de 0.3 cm indiquée sur la figure est une contrainte imposée par le client.

L'industriel choisit de modéliser le contour de ce logo à l'aide d'une portion de la courbe de la fonction f vue en **partie A**, et de l'image de cette portion par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses, sur un intervalle $[0, 5; \alpha]$.

Le nombre α est un réel supérieur à 1 que l'on déterminera dans cette partie.

L'ensemble est représenté graphiquement dans un repère orthonormé (Fig. 2) d'unité 1 cm.

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (2x - 1)e^{-2x+3}.$$

1. (a) Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$f(x) = e^2 \times \frac{2x - 1}{e^{2x-1}}.$$

- (b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
(On pourra poser $X = 2x - 1$).

2. (a) Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$,

$$f'(x) = (-4x + 4)e^{-2x+3}.$$

- (b) Construire le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

3. Justifier que la contrainte imposée par le client se traduit par l'égalité $f(\alpha) = 0,15$.

Montrer qu'il existe une unique valeur de α dans l'intervalle $[1; +\infty[$ qui permette de vérifier cette égalité.

En donner une valeur arrondie au dixième.

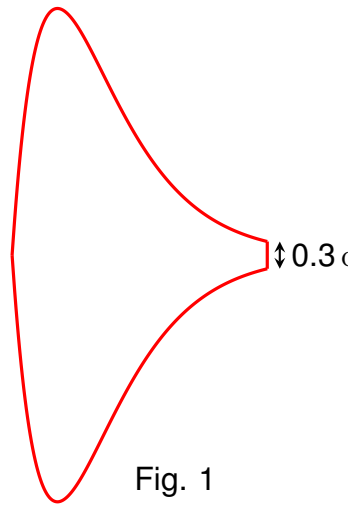


Fig. 1

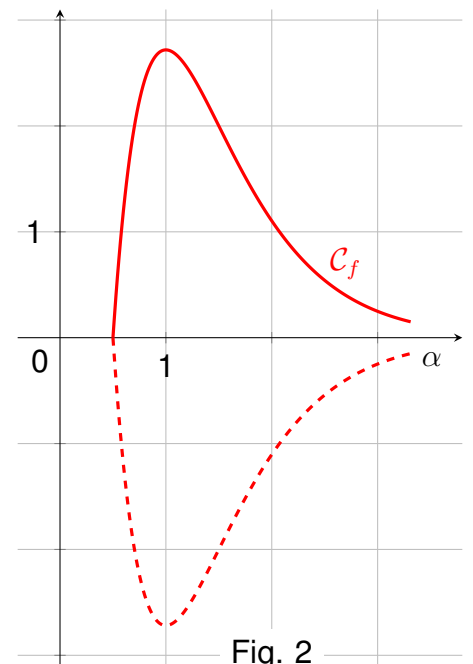


Fig. 2

Partie C

On fabrique un porte-clé en découpant une plaque d'acier suivant la forme du logo représenté par la surface grisée en figure 2 de la **partie B**.

On précise que cette plaque a une épaisseur de 0.2 cm.

1. On considère :

$$I = \int_{0,5}^{3,3} f(x) \, dx$$

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale I arrondie au dixième est égale à 3,6.

2. On précise que le volume du porte-clé est égal à :

$$\text{Aire du logo} \times \text{épaisseur de la plaque}$$

Déterminer le volume du porte-clé en cm^3 , arrondi au dixième.