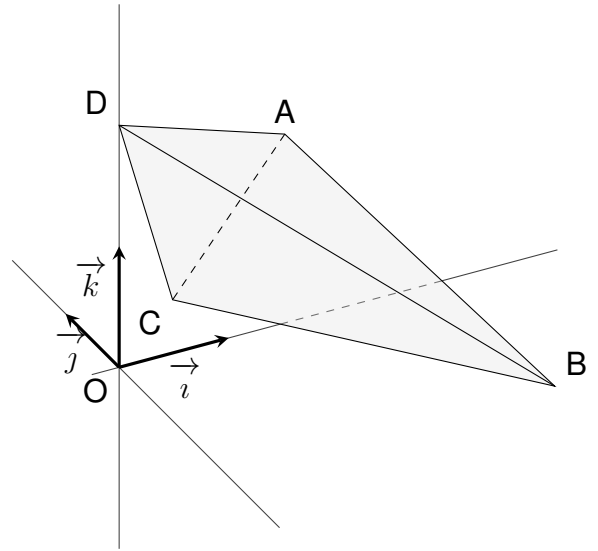


Exercice 1

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
on considère les points :
 $A(2; 1; 1)$, $B(3; -2; 0)$, $C(0; -1; 1)$ et $D(0; 0; 2)$.



1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

2. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

(b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x - y + 4z - 5 = 0.$$

3. Vérifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et orthogonale au plan (ABC) est donnée par :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

4. Montrer que le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est le point $H\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{4}{3}\right)$.

5. (a) Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.

(b) Montrer que l'aire du triangle ABC est $3\sqrt{2}$.

6. (a) En déduire que le volume du tétraèdre ABCD est égal à 1.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par: $V = \frac{1}{3}Bh$, où B est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

(b) On admet que la distance du point A au plan (BCD) est égale à $\sqrt{2}$.

En déduire l'aire du triangle BCD.

7. Dans cette question, on note D_k le point ayant pour coordonnées $(0; 0; k)$, où k est un réel.

- (a) Déterminer la valeur de k pour laquelle les points A, B, C et D_k sont coplanaires.
Quel est alors le projeté orthogonal du point D_k sur le plan (ABC) ?
- (b) Peut-on trouver une valeur de k telle que A soit le projeté orthogonal de D_k sur le plan (ABC) ?