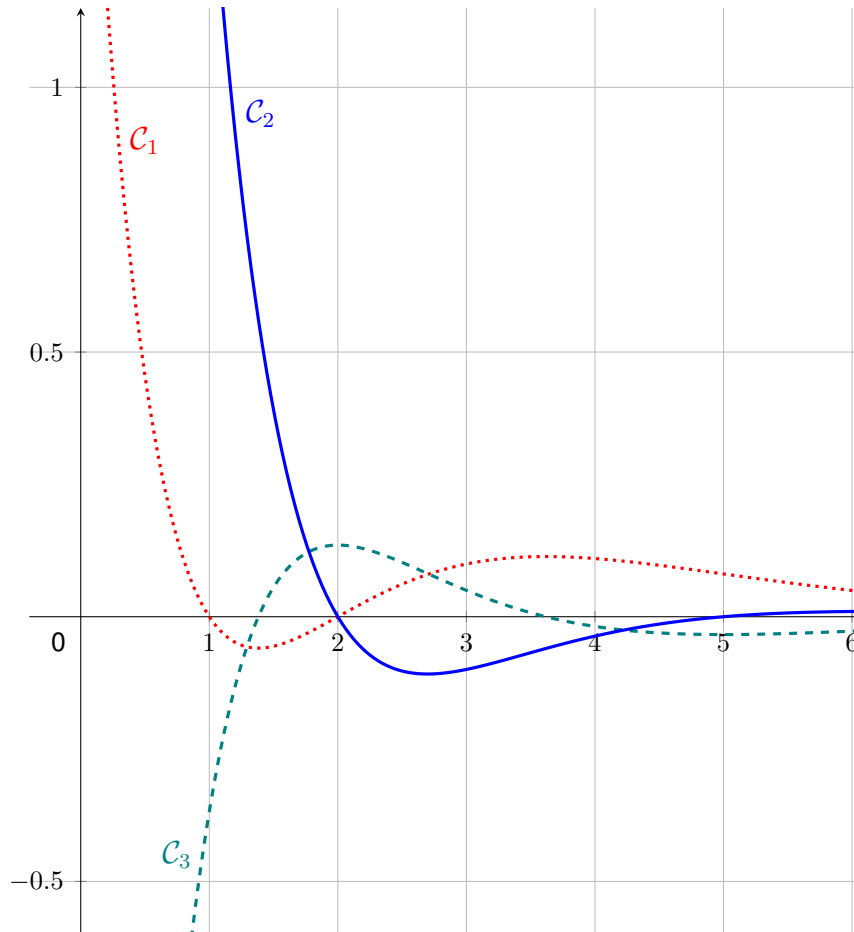


Exercice 4

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé trois courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

Les courbes correspondent aux représentations graphiques de trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$: une fonction f , sa dérivée f' et sa dérivée seconde f'' .



Associer chacune des fonctions f , f' et f'' à sa courbe représentative. *Aucune justification n'est attendue.*

Partie B

On considère l'équation différentielle (E) définie par $y' + y = (2x - 3)e^{-x}$ où y est une fonction de la variable réelle x .

- On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (x^2 - 3x)e^{-x}$$

Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E) .

2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = 0$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 2$.

Partie C

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x} (x^2 - 3x + 2)$$

et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Étudier le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
(b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. On note I l'intégrale définie par :

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

- (a) À l'aide de deux intégrations par parties successives, démontrer que $I = 1 - \frac{1}{e}$.
- (b) Interpréter graphiquement ce résultat.

Partie D

On considère un réel a .

On note (T_a) la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a .

1. Démontrer que le point d'intersection de la tangente (T_a) et de l'axe des ordonnées a pour ordonnée

$$(a^3 - 4a^2 + 2a + 2) e^{-a}$$

2. Déterminer le nombre de tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ passant par l'origine du repère.
Le candidat explicitera les étapes de la démarche utilisée.