

Exercice 3

Partie A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[2; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(3x^2 + 2x).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[2; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$.
2. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[2; +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - x$$

On admet que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$
et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

- (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2; +\infty[$.
- (b) Donner la valeur de α arrondie au centième.
- (c) En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, les réponses pourront s'appuyer sur les résultats de la **partie A**.

On définit une suite (a_n) par son premier terme $a_0 > 0$ et pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+1} = \ln(3a_n^2 + 2a_n)$$

On étudie le cas où $2 \leq a_0 \leq \alpha$, où α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $2 \leq a_n \leq \alpha$.
2. Démontrer que la suite (a_n) est croissante.
3. Démontrer que la suite (a_n) converge.
4. Démontrer que la limite de la suite (a_n) est α .

Partie C

Dans cette partie, on prend $a_0 = 2$.

La suite (a_n) est ainsi définie par $a_0 = 2$ et pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+1} = \ln(3a_n^2 + 2a_n)$$

On note (b_n) la suite définie par $b_0 = 10$ et pour tout entier naturel n ,

$$b_{n+1} = \ln(3b_n^2 + 2b_n)$$

On admet que la suite (b_n) est strictement décroissante et qu'elle converge vers α .

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $a_n \leq b_n$.
2. On considère le script ci-dessous écrit en langage Python.

```
from math import *  
def algo(p):  
    a = 2  
    b = 10  
    n = 0  
    while b - a > 10**(-p):  
        a = log(3*a**2 + 2*a)  
        b = log(3*b**2 + 2*b)  
        n = n + 1  
    return (n,a)
```

On rappelle qu'en langage Python :

- la commande $\log(c)$ renvoie la valeur de $\ln(c)$;
 - la commande $a**2$ renvoie la valeur de a^2 .
- (a) Donner les valeurs renvoyées par l'instruction `algo(2)`.
On arrondira si besoin les valeurs au millième.
 - (b) Interpréter les valeurs renvoyées dans le contexte de l'exercice.