

Exercice 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(1; 2; 3), \quad B(-1; 3; 1), \quad C(2; 1; 6) \quad \text{et} \quad D(3; -2; -1).$$

1. (a) Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
 (b) Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
 (c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2. (a) Déterminer une équation paramétrique de la droite (d) , perpendiculaire au plan (ABC) et passant par le point D.
 (b) Déterminer les coordonnées du point H qui est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
 (c) En déduire que la distance du point D au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{2}$.
3. (a) Montrer que

$$\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{3\sqrt{11}}{11}$$

- (b) En déduire la valeur exacte de $\sin(\widehat{BAC})$.
- (c) Montrer que l'aire du triangle ABC vaut $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.
4. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h, \quad \text{où } \mathcal{B} \text{ est l'aire d'une base et } h \text{ la hauteur qui lui est associée.}$$