

Exercice 1

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\left] -\infty; \frac{3}{2} \right[$ par :

$$f(x) = \frac{x-2}{2x-3}$$

- Justifier tous les éléments du tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$
f	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

- En déduire que pour tout $x \in [0; 1]$, on a :

$$f(x) \in [0; 1].$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n - 3}, \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n$$

- En utilisant la fonction f , démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

- En déduire que la suite (u_n) converge.
- On note ℓ la limite de la suite (u_n) .

En admettant que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0; 1]$, montrer que $\ell = 1$.

- On donne ci-dessous une fonction `seuil` écrite en langage Python.

```
def seuil(h):
    n = 0
    u = 0
    while u < 1-h:
        n = n+1
        u = (u-2)/(2*u-3)
    return n
```

L'appel `seuil(0.0001)` renvoie la valeur 5,000.

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

5. (a) Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n) sous forme de fractions irréductibles.
(b) Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n et démontrer cette conjecture.