

Exercice 4

On considère la fonction f_k définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_k(x) = 1 - x + \frac{k(1 + \ln x)}{x}$$

où k est un réel strictement positif et $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On désigne par $\mathcal{C}_k$ la représentation graphique de la fonction f_k dans un repère orthonormé.

On admet que la fonction f_k est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$.

On note f'_k sa dérivée première et f''_k sa dérivée seconde.

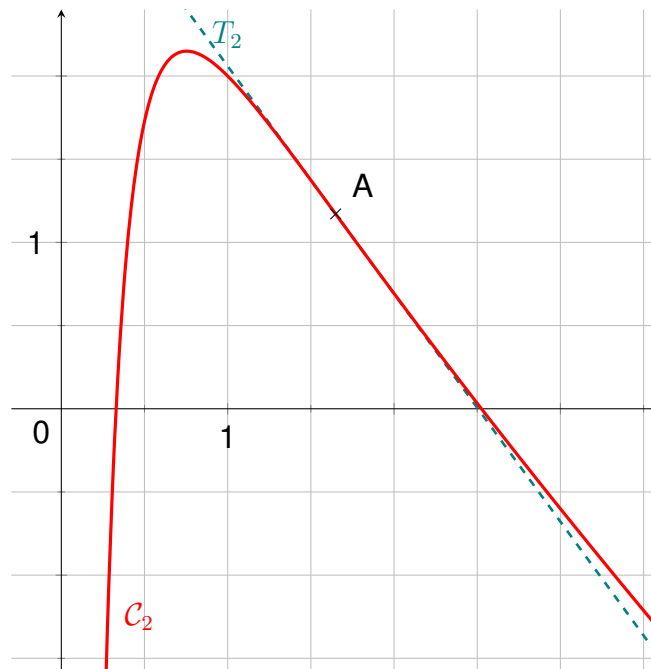
Partie A : étude d'un premier cas particulier

Dans cette partie, on se place dans le cas $k = 2$.

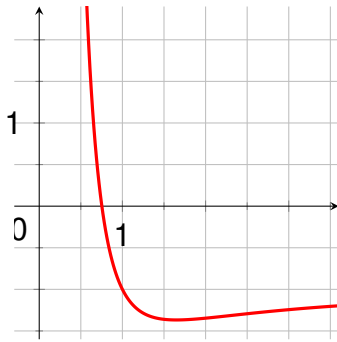
La courbe $\mathcal{C}_2$ est représentée sur le graphique ci-dessous.

On précise que :

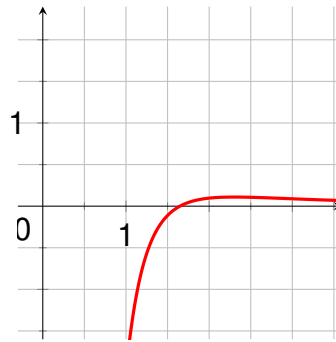
- Le point A est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_2$;
- T_2 est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_2$ au point A.



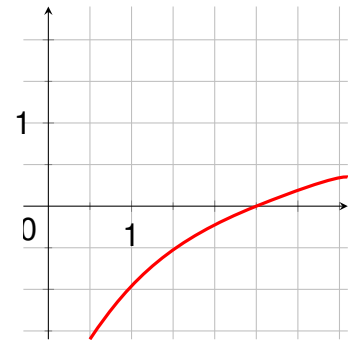
- On considère une primitive F_2 de la fonction f_2 sur $]0; +\infty[$.
Avec la précision permise par le graphique, donner les variations de la fonction F_2 sur l'intervalle $]0; 3]$.
- Parmi les trois courbes ci-dessous, indiquer celle qui représente f'_2 et celle qui représente f''_2 .
Justifier.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

Partie B : étude d'un second cas particulier

Dans cette partie on se place dans le cas $k = 1$.

On considère la fonction f_1 définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_1(x) = 1 - x + \frac{1 + \ln x}{x}$$

1. (a) Montrer que pour tout réel $x > 0$:

$$f_1'(x) = -1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

- (b) Déterminer la limite de $f_1'(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. On admet que :

- l'axe des ordonnées est une asymptote de la courbe de f_1' ;
- pour tout réel $x > 0$, $f_1''(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x^3}$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de f_1' sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

x	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
f_1'	$+\infty$	$-1 - \frac{1}{2e}$	-1

- (a) Justifier les variations de la fonction f_1' sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et la valeur de l'extremum.
- (b) Justifier la limite de la fonction f_1' en 0.
- (c) Montrer qu'il existe une unique solution α à l'équation $f_1'(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$.
En déduire que f_1 admet un maximum sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- (d) Recopier et compléter les pointillés du programme écrit en langage Python ci-dessous, afin qu'il renvoie une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution α de l'équation $f_1'(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$.

```
def d(x) :
    return -1-ln(x)/x**2

def alpha() :
    u = 0.5
    while d(u) ... 0 :
        u = ...
    return u
```

On rappelle que $x**2$ désigne x^2 .

Partie C: k quelconque

On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$,

et la fonction H définie sur $]0; +\infty[$ par $H(x) = \frac{1}{2}(1 + \ln x)^2$.

On admet que H est dérivable sur $]0; +\infty[$.

1. Montrer que la fonction H est une primitive de h .

On rappelle que k est un réel strictement positif et que f_k est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_k(x) = 1 - x + \frac{k(1 + \ln x)}{x}$$

2. Existe-t-il une valeur de k pour laquelle la valeur moyenne de la fonction f_k sur l'intervalle $[1; e]$ est égale à 0 ?

Justifier.