

Exercice 4

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $A(1; 2; -1)$, $B(0; 3; 2)$, $C(-2; 4; 0)$ et $D(8; 2; -11)$.

1.
 - a. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
 - b. Démontrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
 - c. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $5x + 8y - z - 22 = 0$.
 - d. Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (ABC).
2.
 - a. On considère la droite Δ , orthogonale au plan (ABC) et passant par D.
Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = 8 + 5t \\ y = 2 + 8t \\ z = -11 - t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

- b. On appelle E le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
Démontrer que le point E a pour coordonnées $\left(\frac{11}{2}; -2; -\frac{21}{2}\right)$.
 - c. En déduire la valeur exacte de la longueur DE, distance du point D au plan (ABC).
3. On note H le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}; \frac{10}{3}; \frac{4}{3}\right)$.
On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (BC) est :

$$\begin{cases} x = -2k \\ y = 3 + k \\ z = 2 - 2k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Avec un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats suivants :

Entrée 1 : $(-2/3 - 1) * (-2) + (10/3 - 2) * 1 + (4/3 - (-1)) * (-2)$
Sortie 1 : $\rightarrow 0$
Entrée 2 : RésoudreSystème($-2k = -2/3, 3 + k = 10/3, 2 - 2k = 4/3$)
Sortie 2 : $\rightarrow k = 1/3$
Entrée 3 : RacineCarrée($(-2/3 - 1)^2 + (10/3 - 2)^2 + (4/3 + 1)^2$)
Sortie 3 : $\rightarrow \text{RacineCarrée}(10)$
Entrée 4 : RacineCarrée($(-2 - 0)^2 + (4 - 3)^2 + (0 - 2)^2$)
Sortie 4 : $\rightarrow 3$

- a. En utilisant les deux premiers résultats obtenus avec la feuille de calculs ci-dessus, justifier que le point H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).
- b. En exploitant les autres résultats obtenus avec la feuille de calculs ci-dessus, déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur relative à cette base.