

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(3x^2 + 1)$$

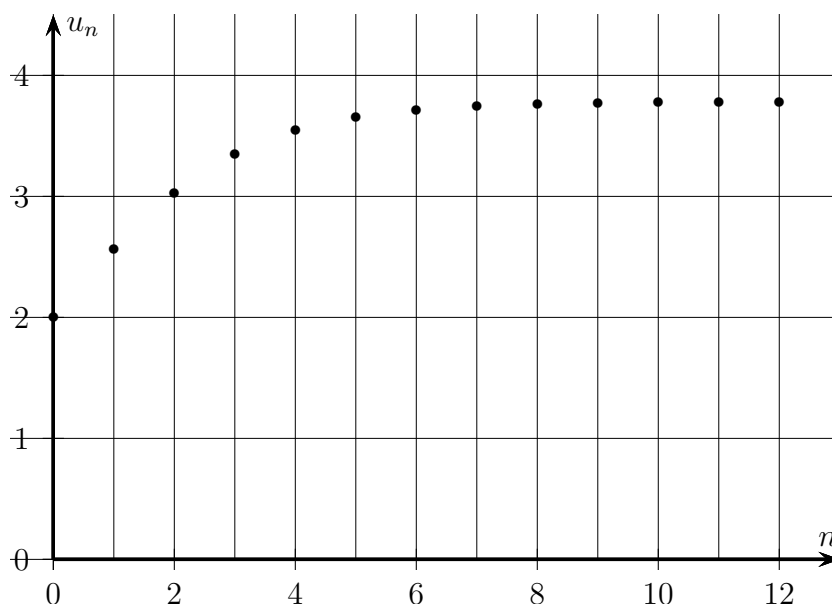
On admet que la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier } n \geq 0, \quad u_{n+1} = \ln(3u_n^2 + 1).$$

1. Calculer u_1 .
2. La suite (u_n) est représentée ci-dessous. Émettre des conjectures sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .



3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Partie B

On note ℓ la limite de la suite (u_n) .

Le but de cette partie est de trouver une valeur approchée de la limite ℓ .

On considère la fonction g définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(3x^2 + 1) - x.$$

1. On note g' la fonction dérivée de la fonction g .

Démontrer que pour tout réel $x \in [0 ; +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{-3x^2 + 6x - 1}{3x^2 + 1}.$$

2. Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur $[2 ; 4]$.

3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[2 ; 4]$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

4. Justifier que $\ell = \alpha$.