

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] - 1; +\infty[$ par :

$$f(x) = a + \frac{b \ln(x+1)}{x+1}.$$

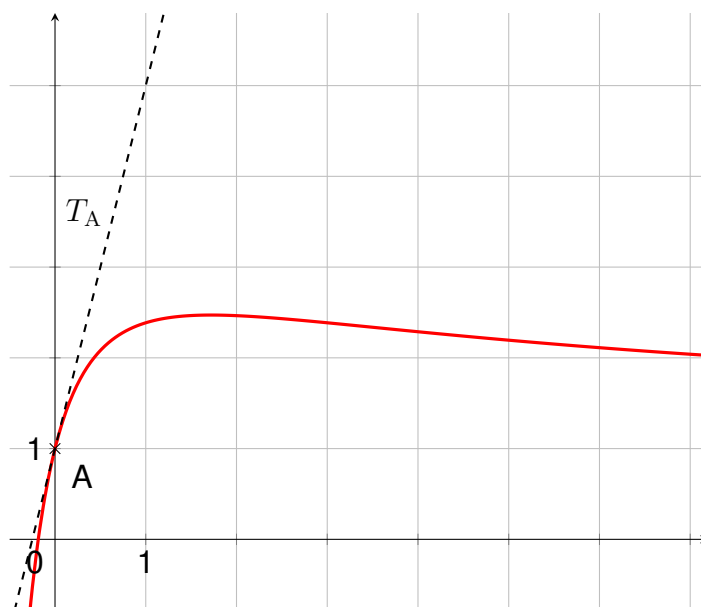
où a et b sont des réels, et $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $] - 1; +\infty[$.

On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

L'objectif de cette partie est de déterminer les valeurs de a et b de sorte que la courbe représentative de la fonction f sur $] - 1; +\infty[$ corresponde à celle tracée dans le repère orthonormé ci-dessous :



On précise que la droite T_A est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point $A(0; 1)$.

1. Justifier que $a = 1$.
2. En utilisant le graphique :
 - (a) Donner la valeur de $f'(0)$.
Justifier.
 - (b) Donner le signe de $f''(1)$.
Justifier.
3. (a) Montrer que pour tout réel x appartenant à $] - 1; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{b(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}$$

- (b) En déduire la valeur de b .

Partie B

On admet dans la suite de l'exercice que la fonction f est définie sur $] - 1; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{4 \ln(x+1)}{x+1}$$

- Justifier que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f .
- Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x+1) > 0$ sur $] - 1; +\infty[$.
- On admet que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$.

Dresser le tableau de variation complet de la fonction f en indiquant la valeur exacte de son extremum.

Justifier.

- Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2; +\infty[$.
En donner une valeur arrondie à 10^{-1} .

- (a) Montrer que :

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \frac{1}{2} (\ln 3)^2.$$

- (b) En déduire l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.