

Exercice 3

On étudie le fonctionnement d'un système de chauffage installé dans une pièce.

Ce système se déclenche automatiquement dès que la température de la pièce est inférieure ou égale à 18 °C (degrés Celsius), et s'éteint lorsqu'elle atteint 20 °C.

Partie A : Phase de chauffage

Pour une température de la pièce variant de 18 °C à 20 °C, le système de chauffage fonctionne en continu. La température de la pièce augmente progressivement.

Dans cette partie, on modélise la température de la pièce, en degré Celsius, à l'instant t , exprimé en dizaines de minutes, par une fonction T définie sur $[0; +\infty[$.

On admet que la fonction T est :

- dérivable sur $[0; +\infty[$;
- solution de l'équation différentielle

$$(E) : y' = -0,035y + 0,91$$

où y est une fonction de la variable t , définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.

On note T' la fonction dérivée de la fonction T .

On suppose qu'au début de l'étude, la température de la pièce est de 18 °C.

Ainsi $T(0) = 18$.

1. Donner les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0; +\infty[$.
2. En déduire que, pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a :

$$T(t) = 26 - 8e^{-0,035t}.$$

3. Selon ce modèle, déterminer au bout de combien de temps la pièce atteindra la température de 20 °C. On exprimera le résultat en heures et minutes arrondi à la minute.
4. Si une panne du système de chauffage l'empêche de s'éteindre lorsque la température de la pièce atteint 20 °C, la température de la pièce pourra-t-elle dépasser 28 °C selon ce modèle ? Justifier.

Partie B: Phase de refroidissement

Lorsque la pièce atteint la température de 20 °C, le système de chauffage s'éteint et la pièce refroidit.

On modélise la température de la pièce par la suite (u_n) définie par $u_0 = 20$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07e^{-0,1n},$$

où n est un nombre entier exprimant le temps écoulé en dizaines de minutes.

1. Montrer que $u_1 = 19,72$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a

$$u_n > 10.$$

On admet que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On note ℓ la limite de la suite (u_n) .

- (a) Justifier que cette limite est solution de l'équation

$$x = 0,965x + 0,35.$$

- (b) Déterminer ℓ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5. On rappelle que le système de chauffage se met en marche automatiquement dès que la température de la pièce, est inférieure ou égale à 18°C .

- (a) Recopier et compléter les lignes 4,5 et 6 du programme écrit en langage Python ci-dessous, afin qu'il renvoie le nombre de dizaines de minutes à partir duquel le système de chauffage se remettra en marche.

```

1. def marche() :
2.     n = 0
3.     u = 20
4.     while ...:
5.         u = ...
6.         n = ...
7.     return n

```

- (b) Déterminer le temps, en dizaines de minutes, à partir duquel le système de chauffage se remettra en marche.