

## Exercice 1

Un navire assure la liaison entre deux ports de la Méditerranée.

Lors d'une traversée, une famille a la possibilité de réserver une cabine ainsi qu'un emplacement pour un véhicule.

### Partie A

Parmi l'ensemble des familles effectuant la traversée, on constate que 30 % réservent un emplacement pour un véhicule et, parmi ces dernières, 80 % réservent une cabine.

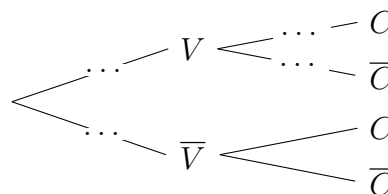
On sait par ailleurs que 75 % des familles effectuant la traversée réservent une cabine.

On choisit au hasard une famille effectuant la traversée, et on considère les événements suivants :

- $V$  : « la famille réserve un emplacement pour un véhicule » ;
- $C$  : « la famille réserve une cabine » .

Pour un événement quelconque  $E$ , on désigne par  $\overline{E}$  son événement contraire et par  $P(E)$  sa probabilité.

1. (a) Donner  $P(C)$ .  
(b) Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les quatre pointillés.



2. Calculer la probabilité qu'une famille réserve un emplacement pour un véhicule et une cabine.
3. Une famille a réservé une cabine.  
Déterminer la probabilité qu'elle réserve un emplacement pour un véhicule.
4. Déterminer  $P_{\overline{V}}(C)$ .  
On arrondira le résultat à  $10^{-2}$ .  
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

### Partie B

Sur ce trajet, la réservation d'une cabine et d'un emplacement pour un véhicule sont facturés en supplément du coût de la traversée.

Ces suppléments sont d'un montant de :

- 100 € pour une cabine ;
- 70 € pour l'emplacement d'un véhicule.

On suppose qu'une famille peut réserver au maximum une cabine et au maximum un emplacement pour un véhicule.

À ces suppléments peuvent s'ajouter le prix payé pour des extras (repas, boissons, etc.).

On note  $X$  la variable aléatoire qui associe, à chaque famille effectuant la traversée, le prix qu'elle paie, en euro, pour les suppléments.

On donne ci-dessous la loi de probabilité de  $X$ .

|              |      |      |      |      |
|--------------|------|------|------|------|
| $x_i$        | 0    | 70   | 100  | 170  |
| $P(X = x_i)$ | 0,19 | 0,06 | 0,51 | 0,24 |

On note  $Y$  la variable aléatoire qui associe, à chaque famille effectuant la traversée, le prix qu'elle paie, en euro, pour les extras.

On admet que la variable aléatoire  $Y$  a pour espérance  $E(Y) = 104$  et pour variance  $V(Y) = 1,686$ .

On suppose que les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

- Justifier que  $E(X) = 96$  et que  $V(X) = 3,114$ .
- À titre exceptionnel, la compagnie propose une remise de 40 % sur les suppléments et les extras.

On note  $Z$  la variable aléatoire qui, à chaque famille effectuant la traversée, associe le montant total pour les suppléments et les extras, en euro, payé par cette famille après réduction.

(a) Justifier que  $Z = 0,6(X + Y)$ .

(b) En déduire que  $E(Z) = 120$  et que  $V(Z) = 1,728$ ,  
où  $E(Z)$  est l'espérance de la variable aléatoire  $Z$  et  $V(Z)$  sa variance.

- On note  $n$  un entier naturel non nul et on choisit au hasard un échantillon de  $n$  familles effectuant cette traversée bénéficiant de la réduction exceptionnelle définie en question 2.

On admet que ce choix peut être assimilé à un tirage avec remise.

On désigne par  $Z_1$  la variable aléatoire égale au prix total pour les suppléments et les extras payé par la première famille,  $Z_2$  la variable aléatoire égale au prix total pour les suppléments et les extras payé par la deuxième famille et ainsi de suite,  $Z_n$  la variable aléatoire égale au prix total pour les suppléments et les extras payé par la  $n$ -ième famille.

On considère la variable aléatoire  $M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}{n}$  donnant le prix total moyen pour les suppléments et les extras, payé par ces familles.

On admet que les variables  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité que la variable aléatoire  $Z$ .

- Montrer que l'espérance  $E(M_n)$  de la variable  $M_n$  est égale à 120, et que sa variance  $V(M_n)$  est égale à  $\frac{1,728}{n}$ .
- Déterminer le plus petit entier  $n$  pour lequel l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que

$$P(114 < M_n < 126) \geq 0,85.$$

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.