

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

1. (a) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle $]0; +\infty[$.
(b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Pour tout réel strictement positif x , démontrer que

$$f'(x) = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}$$

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs exactes des éventuels extremums de la fonction.
4. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ , tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
5. Vérifier que pour tout réel strictement positif x , on a

$$f''(x) = \frac{-5 + 6 \ln(x)}{x^4}$$

6. (a) Étudier la convexité de la fonction f en précisant les coordonnées des éventuels points d'inflexion.
(b) En déduire que, pour tout réel x appartenant à $]0; e^{\frac{5}{6}}]$, on a

$$x - 1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}$$

7. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $[e^{\frac{5}{6}}; +\infty[$, on a aussi

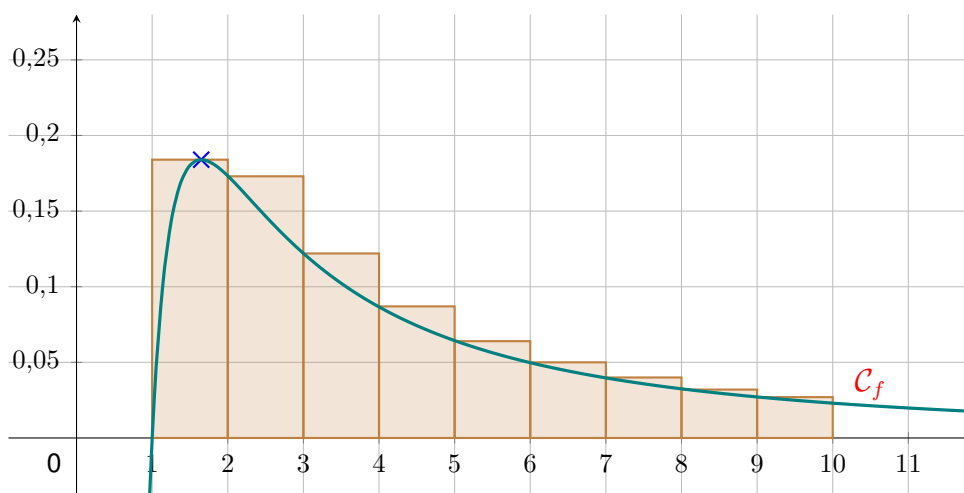
$$x - 1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}$$

Partie B

On considère la suite (I_n) définie, pour tout entier naturel non nul n , par :

$$I_n = \int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

- Donner une interprétation graphique de I_n pour n un entier naturel non nul.
- Démontrer que la suite (I_n) est croissante.
- On souhaite calculer une approximation de $\int_1^{10} f(x) dx$ en déterminant la somme des aires des rectangles tracés dans le graphique ci-dessous.



Pour cela, on utilise le script suivant, écrit en langage Python.

```
from math import *

S=1/(2*exp(1))
for i in range (2,10):
    S =...
print(S)
```

Recopier et compléter ce script afin qu'il réponde au problème posé.

- À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel non nul n ,

$$I_n = \frac{n-1-\ln(n)}{n}$$

- Calculer la limite de la suite (I_n) quand n tend vers $+\infty$.