

Exercice 2

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.

La notice du médicament indique que :

- le traitement doit durer au moins 7 h ;
- lorsque sa quantité, en mg, présente dans le sang est supérieure ou égale à 3 mg, il y a un risque de toxicité.

On s'intéresse à la quantité de médicament présente dans le sang au cours du temps sachant que le patient reçoit une première dose de 1 mg.

Deux protocoles sont étudiés dans les deux parties qui sont indépendantes.

Partie A : étude du premier protocole

Après l'injection de la première dose, une quantité supplémentaire de médicament est administrée régulièrement et de façon continue à un patient mis sous perfusion.

Dans cette partie, on modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient par une fonction q définie sur $[0 ; +\infty[$, où $q(t)$ désigne la quantité, en mg, de médicament présente dans le sang du patient, et t représente le temps, en heure, écoulé depuis l'injection initiale. On a ainsi $q(0) = 1$.

On admet que :

- la fonction q est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et on note q' sa fonction dérivée ;
- la fonction q est solution sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle (E) :

$$y' = -\frac{3}{10}y + 1$$

où y est une fonction de la variable réelle t , définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, et y' sa fonction dérivée.

1. Donner les solutions sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle (E).
2. Montrer que pour tout réel t appartenant à $[0 ; +\infty[$, $q(t) = \frac{10}{3} - \frac{7}{3}e^{-\frac{3}{10}t}$.
3. Déterminer la limite de la fonction q en $+\infty$. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. Étudier les variations de la fonction q sur $[0 ; +\infty[$.
5. Déterminer, en résolvant une inéquation, au bout de combien de temps après l'injection initiale le médicament présente un risque pour le patient. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-1} .
6. D'après ce modèle, le protocole présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

Partie B : étude du second protocole

On injecte au patient une première dose de médicament de 1 mg. On admet que la quantité de médicament présente dans le sang du patient baisse de 30 % toutes les heures. Pour compenser cette baisse, on injecte une dose supplémentaire de 0,75 mg de médicament toutes les heures.

On modélise la situation par une suite (u_n) , où, pour tout entier naturel n , u_n représente la quantité, en mg, de médicament présente dans le sang du patient au bout de n heures écoulées depuis l'injection initiale.

Sous ces conditions, on a $u_0 = 1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,7 \times u_n + 0,75$.
2.
 - a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - c. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) .
 - d. D'après ce modèle, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.
3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 2,5$.
 - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le terme initial.
 - b. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,7^n$.
4. D'après ce modèle, au bout de combien d'injections supplémentaires la quantité de médicament présente dans le sang de ce patient dépasse-t-elle 2,4 mg ?