

Exercice 3

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- les points $A(4; 2; 2)$, $B(5; -2; 3)$ et $C(1; 1; 1)$;
- la droite Δ dont une représentation paramétrique est donnée par

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

- le plan $\mathcal{P}$ contenant le point A et perpendiculaire à la droite Δ .

1. Vérifier que la droite Δ contient le point C(1 ; 1 ; 1) mais pas le point A.

2. (a) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan est $2x + y + 2z - 14 = 0$.
(b) Vérifier que le plan $\mathcal{P}$ contient le point B mais pas le point C.

3. On considère le point D(3 ; 2 ; 3).

- (a) Démontrer que le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathcal{P}$.
(b) Justifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
(c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
(d) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur relative à cette base.

4. On appelle H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

- (a) Vérifier que les coordonnées du point H sont $\left(\frac{73}{29}; \frac{-4}{29}; \frac{51}{29}\right)$.
(b) Démontrer que l'aire du triangle ABC est $\frac{3\sqrt{22}}{2}$.
(c) En déduire la distance du point D au plan (ABC).