

## Exercice 2

### Partie A: étude du sens de variation d'une fonction

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

1. Résoudre l'équation  $f(x) = x$ .

2. (a) On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Vérifier que, pour tout réel  $x$ , on a  $f'(x) = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

(b) En déduire le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente

La suite  $(u_n)$  est définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$ .

2. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

3. Le but de cette question est de retrouver par une autre méthode les résultats de la question 2. de la **partie B**.

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$$v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$$

On admet que la suite  $(v_n)$  est bien définie.

(a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 4 dont on précisera le premier terme.

(b) En déduire une expression de  $v_n$  en fonction de  $n$  puis que  $u_n = \sqrt{\frac{1,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n}}$  pour tout entier naturel  $n$ .

(c) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

### Partie C : étude de la convergence de la somme de termes

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2$ .

1. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci permette de lister les  $p$  premiers termes de la suite  $(S_n)$ .

```
from math import*

def termes(p) :
    u = ...
    S=0
    L= [ ]
    for i in range(p)
        S=...
        u= ...
        L.append(S)
    return L
```

Remarque : on rappelle qu'en langage Python,

- la commande `L= [ ]` crée une liste vide ;
  - la commande `L.append (S)` ajoute, à la fin de la liste `L`, l'élément supplémentaire `S`.
2. On rappelle que, pour tout entier naturel  $k$ , on a  $1 \leq u_k \leq \sqrt{3}$ .  
Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a  $n \leq S_n \leq 3n$ .
3. En déduire les limites respectives de  $S_n$  et de  $\frac{S_n}{n^2}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .