

Exercice 4

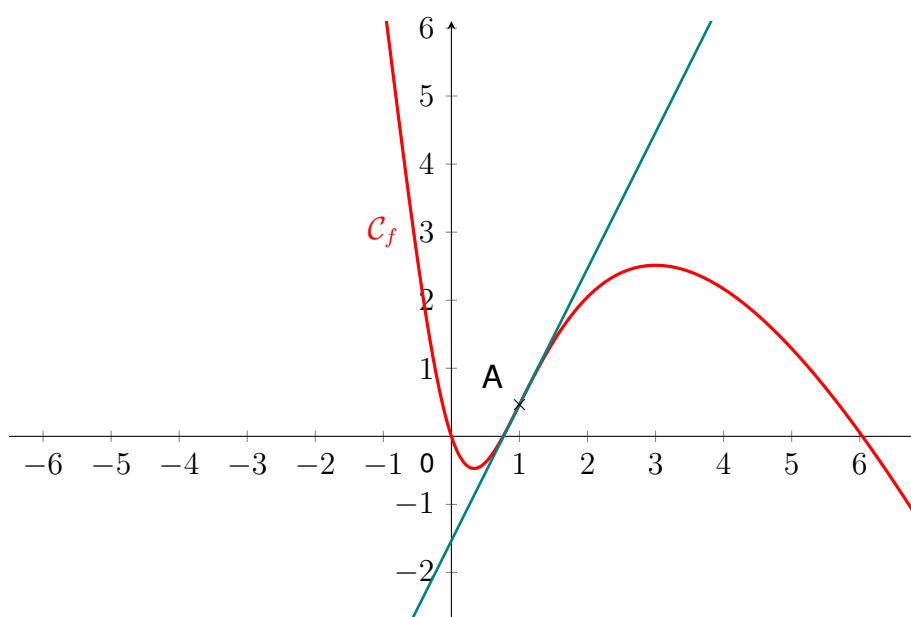
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 5 \ln(x^2 + 1) - 3x$$

et on admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.



1. Conjecturer, à l'aide de la représentation graphique de la fonction f , les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. (a) Démontrer que, pour tout x réel strictement positif,

$$f(x) = x \left(10 \frac{\ln x}{x} - 3 \right) + 5 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$$

- (b) Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $+\infty$.
4. (a) Démontrer que pour tout x réel, $f'(x) = \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 1}$.
- (b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x ,

$$f''(x) = \frac{-10x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2}$$

- (a) Valider ou rejeter la conjecture faite à la question 1.

- (b) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
- (c) En déduire que pour tout $x \geq 1$, $\ln(x^2 + 1) \leq x + \ln(2) - 1$.