

Exercice 1

Une plateforme de diffusion musicale propose trois types d'abonnements : « Étudiant », « Classique » et « Famille ». Elle propose également une option « Écoute hors-ligne » qu'on peut activer pour chaque type d'abonnement et qui permet de télécharger de la musique.

Une étude statistique menée sur les abonnés a permis d'établir que :

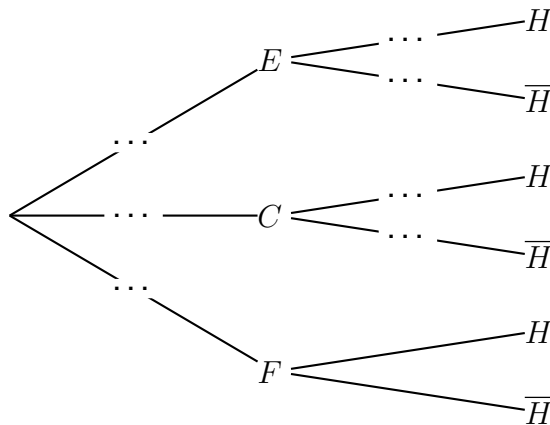
- 25 % des abonnés ont choisi l'abonnement « Étudiant » et 15 % ont choisi l'abonnement « Famille » ;
- 45 % des abonnés « Étudiant » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- 30 % des abonnés « Classique » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- 12 % des abonnés ont choisi l'abonnement « Famille » et ont activé l'option « Écoute hors-ligne ».

On prélève au hasard le profil d'un abonné et on considère les événements suivants :

- E : l'abonné a choisi l'abonnement « Étudiant » ;
- C : l'abonné a choisi l'abonnement « Classique » ;
- F : l'abonné a choisi l'abonnement « Famille » ;
- H : l'abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ».

Partie A

1. Recopier l'arbre de probabilités suivant, en complétant les pointillés :



2. Calculer la valeur exacte de $P(E \cap H)$.
3. Démontrer que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0.412,5.
4. Un abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ». Déterminer la probabilité qu'il ait choisi l'abonnement « Étudiant ». On arrondira le résultat au millième.

Partie B

On choisit huit abonnés de cette plateforme, au hasard et de manière indépendante. On considère qu'il y a suffisamment d'abonnés pour que ce choix soit assimilé à un tirage avec remise.

On rappelle que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0,4125.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'abonnés ayant activé l'option « Écoute hors-ligne ».

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option « Écoute hors-ligne ». On arrondira le résultat au millième.
3. Dans cette question, n est un entier naturel non nul.

On s'intéresse à un échantillon de n abonnés, qu'on assimile à un tirage avec remise.

On note q_n la probabilité qu'au moins un abonné de cet échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne ».

(a) Démontrer que, pour tout n entier naturel non nul, $q_n = 1 - 0.587,5^n$.

(b) Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins un abonné de l'échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne » soit supérieure ou égale à 99,9 %.

Partie C

La plateforme propose les tarifs mensuels suivants :

- Abonnement « Étudiant » : 5 € par mois ;
- Abonnement « Classique » : 10 € par mois ;
- Abonnement « Famille » : 16 € par mois ;
- Option « Écoute hors-ligne » : 2 € de plus par mois, quel que soit l'abonnement choisi.

On note Y la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné.

1. Donner les six valeurs possibles prises par la variable aléatoire Y .
2. Dresser le tableau décrivant la loi de probabilité de la variable aléatoire Y .
3. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y vaut 10,475 et interpréter ce résultat dans le contexte.
4. À l'aide de la calculatrice, donner la variance de la variable aléatoire Y , arrondie au centième.
5. Une plateforme vidéo propose les mêmes types d'abonnements. On note Z la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné à cette plateforme vidéo.

On admet que l'espérance de la variable aléatoire Z vaut 9 et son écart-type 2.

(a) Calculer la variance de la variable aléatoire Z .

(b) Un responsable affirme que, si on interroge un abonné de cette plateforme vidéo au hasard, il y a au moins 50 % de chances pour que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros.

Justifier cette affirmation.