

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

En déduire les éventuelles asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$.

2. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution, notée α , sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
(b) Donner un encadrement du réel α d'amplitude 0,01.
(c) En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x)$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé d'origine O. On considère un réel x strictement positif et le point M de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x . On note OM la distance entre les points O et M.

- (a) Exprimer la quantité OM^2 en fonction du réel x .
- (b) Montrer que, lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0 ; +\infty[$, la quantité OM^2 admet un minimum en α .
- (c) La valeur minimale de la distance OM, lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0 ; +\infty[$, est appelée distance du point O à la courbe $\mathcal{C}_g$. On note d cette distance.
Exprimer d à l'aide de α .