

Exercice 3

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \ln(e^{\frac{x}{2}} + 2)$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \ln(9)$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(2 \ln(2)) = 2 \ln(2)$.
3. Montrer que $u_1 = \ln(5)$.
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$$2 \ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$$

5. En déduire que la suite (u_n) converge.
6. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - X - 2 = 0$.
(b) En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$$

- (c) En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = x$.
- (d) Déterminer la limite de la suite (u_n) .