

Exercice 4

Partie A : dénombrement

On considère l'ensemble des nombres entiers relatifs **non nuls** compris entre -30 et 30 ; cet ensemble peut s'écrire ainsi : $\{-30 ; -29 ; -28 ; \dots -1 ; 1 ; \dots ; 28 ; 29 ; 30\}$. Il comporte 60 éléments.

On choisit dans cet ensemble successivement et sans remise un entier relatif a puis un entier relatif c .

- Combien de couples $(a ; c)$ différents peut-on ainsi obtenir ?

On considère l'évènement M : « l'équation $ax^2 + 2x + c = 0$ possède deux solutions réelles distinctes », où a et c sont les entiers relatifs précédemment choisis.

- Montrer que l'évènement M a lieu si et seulement si $ac < 1$.
- Expliquer pourquoi l'évènement contraire $\overline{M}$ comporte 1,740 issues.
- Quelle est la probabilité de l'évènement M ? On arrondira le résultat à 10^{-2} .

Partie B : équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + 10y = (30x^2 + 22x - 8)e^{-5x+1} \quad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R}$$

où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y' + 10y = 0$.
- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (6x^2 + 2x - 2)e^{-5x+1}.$$

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' la fonction dérivée de la fonction f .

Justifier que f est une solution particulière de (E) .

- Donner l'expression de toutes les solutions de (E) .

Partie C : étude de fonction

On propose d'étudier dans cette partie la fonction f rencontrée à la partie B question 2.

On rappelle que, pour tout réel x , $f(x) = (6x^2 + 2x - 2)e^{-5x+1}$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f . On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

- On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$

2. En utilisant la partie A, montrer que $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points (les coordonnées de ces points ne sont pas attendues).
3. En utilisant les parties A et B, montrer que $\mathcal{C}_f$ possède deux tangentes horizontales.
4. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f .
5. Déterminer en justifiant le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = 1$.
6. Pour tout réel m strictement supérieur à 0, 2, on définit I_m par $I_m = \int_{0,2}^m f(x) \, dx$.

(a) Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \left(-\frac{6}{5}x^2 - \frac{22}{25}x + \frac{28}{125} \right) e^{-5x+1}$$

est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

- (b) Existe-t-il une valeur de m pour laquelle $I_m = 0$?
Interpréter graphiquement ce résultat.