

## Exercice 1

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à  $10^{-3}$  près en cas de besoin.  
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.

### Partie A

Au tennis, le joueur qui est au service peut, en cas d'échec lors du premier service, servir une deuxième balle.

En match, Abel réussit son premier service dans 70 % des cas. Lorsque le premier service est réussi, il gagne le point dans 80 % des cas.

En revanche, après un échec à son premier service, Abel gagne le point dans 45 % des cas.

Abel est au service.

On considère les événements suivants :

- $S$  : « Abel réussit son premier service »
- $G$  : « Abel gagne le point ».

1. Décrire l'évènement  $S$  puis traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer  $P(S \cap G)$ .
3. Justifier que la probabilité de l'évènement  $G$  est égale à 0,695.
4. Abel a gagné le point. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi son premier service ?
5. Les événements  $S$  et  $G$  sont-ils indépendants ? Justifier.

### Partie B

À la sortie d'une usine de fabrication de balles de tennis, une balle est jugée conforme dans 85 % des cas.

1. On teste successivement 20 balles. On considère que le nombre de balles est suffisamment grand pour assimiler ces tests à un tirage avec remise. On note  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de balles conformes parmi les 20 testées.
  - (a) Quelle est la loi suivie par  $X$  et quels sont ses paramètres ? Justifier.
  - (b) Calculer  $P(X \leq 18)$ .
  - (c) Quelle est la probabilité qu'au moins deux balles ne soient pas conformes parmi les 20 balles testées ?
  - (d) Déterminer l'espérance de  $X$ .

2. On teste maintenant  $n$  balles successivement. On considère les  $n$  tests comme un échantillon de  $n$  variables aléatoires  $X$  indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre 0,85.

On considère la variable aléatoire

$$M_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \frac{X_3}{n} + \dots + \frac{X_n}{n}$$

- (a) Déterminer l'espérance et la variance de  $M_n$ .
- (b) Après avoir rappelé l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  
 $P(0,75 < M_n < 0,95) \geq 1 - \frac{12,75}{n}$ .
- (c) En déduire un entier  $n$  tel que la moyenne du nombre de balles conformes pour un échantillon de taille  $n$  appartienne à l'intervalle  $]0,75 ; 0,95 [$  avec une probabilité supérieure à 0,9.