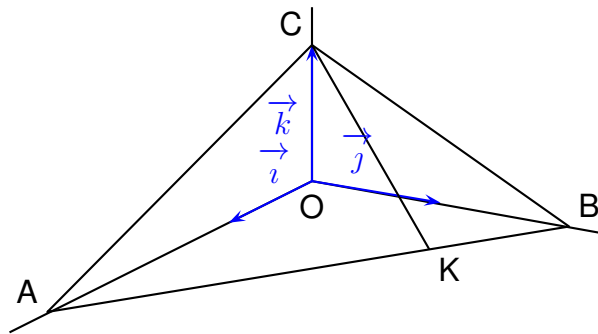


Exercice 4

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points

$$A(2\sqrt{3}; 0; 0), \quad B(0; 2; 0), \quad C(0; 0; 1) \quad \text{et} \quad K\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 0\right).$$



1. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (CK) est :

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{3}{2}t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

2. Soit $M(t)$ un point de la droite (CK) paramétrée par un réel t .

Établir que $OM(t) = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}$.

3. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = OM(t)$.

(a) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire la valeur de t pour laquelle f atteint son minimum.

4. En déduire que le point $H\left(\frac{\sqrt{3}}{8}; \frac{3}{8}; \frac{3}{4}\right)$ est le projeté orthogonal du point O sur la droite (CK).

5. Démontrer, à l'aide de l'outil produit scalaire, que le point H est l'orthocentre (intersection des hauteurs d'un triangle) du triangle ABC.

6. (a) Démontrer que la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC).

(b) En déduire une équation du plan (ABC).

7. Calculer, en unité d'aire, l'aire du triangle ABC.