

Exercice 1

Un étudiant mange tous les jours au restaurant universitaire. Ce restaurant propose des plats végétariens et des plats non végétariens.

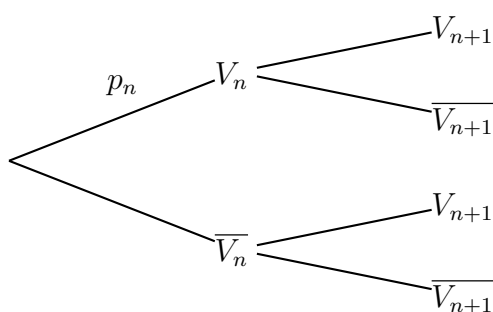
- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est 0,9.
- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat non végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est 0,7.

Pour tout entier naturel n , on note V_n l'évènement « l'étudiant a choisi un plat végétarien le n^{e} jour » et p_n la probabilité de V_n .

Le jour de la rentrée, l'étudiant a choisi le plat végétarien. On a donc $p_1 = 1$.

- Indiquer la valeur de p_2 .
 - Montrer que $p_3 = 0,88$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
 - Sachant que le 3^e jour l'étudiant a choisi un plat végétarien, quelle est la probabilité qu'il ait choisi un plat non végétarien le jour précédent ?
On arrondira le résultat à 10^{-2} .

- Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous:



- Justifier que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,7$.
- On souhaite disposer de la liste des premiers termes de la suite (p_n) pour $n \geq 1$.
Pour cela, on utilise une fonction appelée `repas` programmée en langage Python dont on propose trois versions, indiquées ci-dessous.

Programme 1

```
1 def repas(n):
2     p=1
3     L=[p]
4     for k in range(1,n):
5         p = 0.2*p+0.7
6         L.append(p)
7     return(L)
```

Programme 2

```
1 def repas(n):
2     p=1
3     L=[p]
4     for k in range(1,n+1):
5         p = 0.2*p+0.7
6         L.append(p)
7     return(L)
```

Programme 3

```
1 def repas(n):
2     p=1
3     L=[p]
4     for k in range(1,n):
5         p = 0.2*p+0.7
6         L.append(p+1)
7     return(L)
```

4. (a) Lequel de ces programmes permet d'afficher les n premiers termes de la suite (p_n) ? Aucune justification n'est attendue.
- (b) Avec le programme choisi à la question a. donner le résultat affiché pour $n = 5$.
5. Démontrer par récurrence que, pour tout naturel $n \geq 1$, $p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875$.
6. En déduire la limite de la suite (p_n) .