

## Exercice 4

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points

$$A(4; -1; 3), \quad B(-1; 1; -2), \quad C(0; 4; 5) \text{ et } D(-3; -4; 6).$$

1. (a) Vérifier que les points A, B, C ne sont pas alignés.

On admet qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :  $29x + 30y - 17z = 35$ .

- (b) Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ? Justifier.

On admet que lorsque quatre points ne sont pas coplanaires, il existe un unique point situé à égale distance de ces quatre points.

L'objectif de cet exercice est de déterminer le point H se situant à égale distance des quatre points A, B, C, D.

On définit le plan médiateur d'un segment comme le plan passant par le milieu de ce segment et orthogonal à la droite portant ce segment. C'est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

2. Soit  $P_1$  le plan médiateur du segment [AB].

- (a) Déterminer les coordonnées du milieu du segment [AB].

- (b) En déduire qu'une équation cartésienne de  $P_1$  est :  $5x - 2y + 5z = 10$ .

3. On note  $P_2$  le plan médiateur du segment [CD].

- (a) Soit M un point du plan  $P_2$  de coordonnées  $(x; y; z)$ .

Exprimer  $MC^2$  et  $MD^2$  en fonction des coordonnées de M.

En déduire qu'une équation cartésienne du plan  $P$  est :  $-3x - 8y + z = 10$ .

- (b) Justifier que les plans  $P_1$  et  $P_2$  sont sécants.

4. Soit  $\Delta$  la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -2 - 1,9t \\ y = t \\ z = 4 + 2,3t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

Démontrer que  $\Delta$  est la droite d'intersection de  $P_1$  et  $P_2$ .

On note  $P_3$  le plan médiateur du segment [AC].

On admet qu'une équation cartésienne du plan  $P_3$  est :  $8x - 10y - 4z = -15$ .

5. Démontrer que la droite  $\Delta$  et le plan  $P_3$  sont sécants.

6. Justifier que le point d'intersection entre  $\Delta$  et  $P_3$  est le point H.