

Exercice 3

Le but de cet exercice est d'étudier les convergences de deux suites vers une même limite.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[2 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{3x - 2}.$$

1. Justifier les éléments du tableau de variations ci-dessous :

x	2	$+\infty$
$f(x)$	2	$+\infty$

On admet que la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 6$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel : $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$.

(b) En déduire que la suite (u_n) converge.

3. On appelle ℓ la limite de (u_n) .

On admet qu'elle est solution de l'équation $f(x) = x$. Déterminer la valeur de ℓ .

4. On considère la fonction `rang` écrite ci-dessous en langage Python.

On rappelle que `sqrt(x)` renvoie la racine carrée du nombre x .

```

1 from math import *
2
3 def rang(a) :
4     u = 6
5     n=0
6     while u >= a :
7         u = sqrt(3*u - 2)
8         n = n+1
9     return n

```

(a) Pourquoi peut-on affirmer que `rang(2.000001)` renvoie une valeur ?

(b) Pour quelles valeurs du paramètre a l'instruction `rang(a)` renvoie-t-elle un résultat ?

Partie B

On admet que la suite (v_n) vérifiant $v_0 = 6$ et, pour tout n , entier naturel, $v_{n+1} = 3 - \frac{2}{v_n}$ est bien définie.

1. Calculer v_1 .
2. Pour tout n entier naturel, on admet que $v_n \neq 2$ et on pose :

$$w_n = \frac{v_n - 1}{v_n - 2}$$

- (a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2 et préciser son premier terme w_0 .
- (b) On admet que, pour tout n entier naturel,

$$w_n - 1 = \frac{1}{v_n - 2}.$$

En déduire que, pour tout n entier naturel,

$$v_n = 2 + \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1}$$

- (c) Calculer la limite de (v_n) .
3. Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $v_n < 2,01$ en résolvant l'inéquation.

Partie C

À l'aide des parties précédentes, déterminer le plus petit entier N tel que pour tout $n \geq N$, les termes v_n et u_n appartiennent à l'intervalle $]1,99 ; 2,01[$.