

Exercice 1

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + 0,4y = e^{-0,4t}$$

où y est une fonction de la variable réelle t .

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(t) = te^{-0,4t}$.

Vérifier que u est solution de (E) .

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = f(t) - u(t)$.

Soit (H) l'équation différentielle $y' + 0,4y = 0$.

- (a) Démontrer que si la fonction g est solution de l'équation différentielle (H) alors la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) .

On admettra que la réciproque est vraie.

- (b) Résoudre l'équation différentielle (H) .
- (c) En déduire les solutions de (E) .
- (d) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

Partie B

On s'intéresse à la glycémie chez une personne venant de prendre un repas.

La glycémie en g.L^{-1} , en fonction du temps t , exprimé en heure, écoulé depuis la fin du repas, est modélisée par la fonction f définie sur $[0 ; 6]$ par :

$$f(t) = (t + 1)e^{-0,4t}.$$

1. (a) Montrer que, pour tout $t \in [0 ; 6]$, $f'(t) = (-0,4t + 0,6)e^{-0,4t}$.
(b) Étudier les variations de f sur $[0 ; 6]$ puis dresser son tableau de variations sur cet intervalle.
2. Une personne est en hypoglycémie lorsque sa glycémie est inférieure à $0,7 \text{ g.L}^{-1}$.
(a) Démontrer que sur l'intervalle $[0 ; 6]$ l'équation $f(t) = 0,7$ admet une unique solution que l'on notera α .
(b) Au bout de combien de temps après avoir pris son repas cette personne est-elle en hypoglycémie ?
On exprimera ce temps à la minute près.

3. On souhaite déterminer la glycémie moyenne en g.L^{-1} chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.

(a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que:

$$\int_0^6 f(t) \, dt = -23,75e^{-2,4} + 8,75.$$

(b) Calculer la glycémie moyenne en g.L^{-1} chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.

(c) En remarquant que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) , expliquer comment on aurait pu obtenir ce résultat autrement.