

Exercice 4

Soit n un entier naturel non nul.

Dans le cadre d'une expérience aléatoire, on considère une suite d'évènements A_n et on note p_n la probabilité de l'évènement A_n .

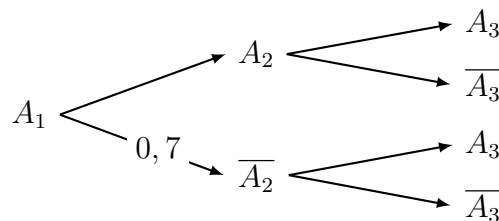
Pour les parties **A** et **B** de l'exercice, on considère que :

- Si l'évènement A_n est réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,3.
- Si l'évènement A_n n'est pas réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,7.

On suppose que $p_1 = 1$.

Partie A :

1. Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous:

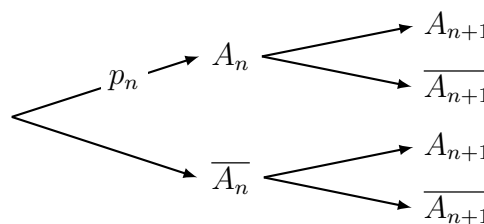


2. Montrer que $p_3 = 0,58$.
3. Calculer la probabilité conditionnelle $P_{A_3}(A_2)$, arrondir le résultat à 10^{-2} près.

Partie B :

Dans cette partie, on étudie la suite (p_n) avec $n \geq 1$.

1. Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous :



2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = -0,4p_n + 0,7$.

On considère la suite (u_n) , définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = p_n - 0,5.$$

- (b) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- (c) En déduire l'expression de u_n , puis de p_n en fonction de n .
- (d) Déterminer la limite de la suite (p_n) .

Partie C :

Soit $x \in]0 ; 1[$, on suppose que $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = P_{A_n}(\overline{A_{n+1}}) = x$. On rappelle que $p_1 = 1$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = (1 - 2x)p_n + x$.
2. Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n non nul :

$$p_n = \frac{1}{2}(1 - 2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

3. Montrer que la suite (p_n) est convergente et donner sa limite.