Exercice 1 — 6 points

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B.

Au 1er janvier 2025, on introduit 6,000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $0,93$.

Pour tout entier naturel $n,\ u_n$ représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 6 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n.$$

Pour tout entier naturel n, v_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = -0,05x^2 + 1,1x.$$

2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle [0 ; 11].
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6.$$

4. En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ.
5. (a) Justifier que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ puis en déduire la valeur de ℓ.

   (b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

1. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3,000 individus.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3,000 individus.
3. Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.
4. On considère le programme Python ci-contre.
   (a) Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.
   (b) Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

```
n=0
u = 6
v = 6
while ... :
    u = ...
    v= ...
    n = n+1
print (2025 + n)
```

Exercice 2 — 6 points

On s'intéresse à l'évolution du taux d'équipement en réfrigérateurs d'une population donnée, c'est-à-dire à la proportion de cette population qui possède au moins un réfrigérateur.

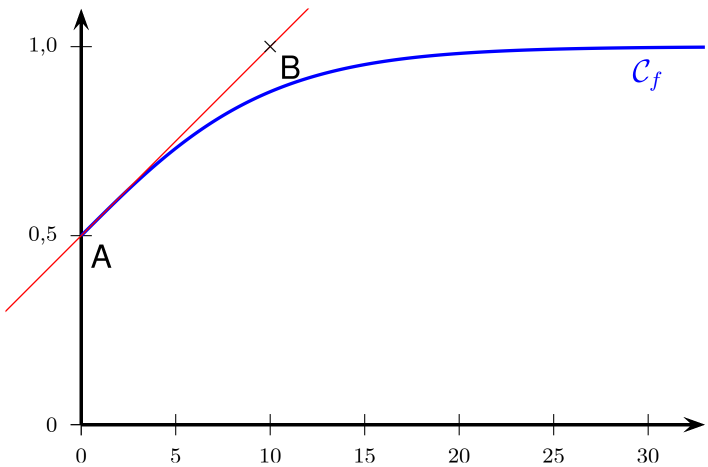
Partie A

On admet que le taux d'équipement en réfrigérateurs est modélisé par une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{1}{a + \mathrm{e}^{-bt}}$$

où t représente le temps écoulé, en années, depuis 1960, et a et b sont deux constantes réelles strictement positives.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. La fonction f admet pour représentation graphique la courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous :



On considère les points A(0 ; 0,5) et B(10 ; 1).
On admet que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

1. Par lecture graphique, donner une valeur approchée du taux d'équipement en réfrigérateurs en 1970.
2. On admet que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 1$.

   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Justifier que $a = 1$.
4. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
5. (a) Déterminer l'expression de $f'(t)$ en fonction de t et de la constante b.

   (b) En déduire la valeur de b.

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que le taux d'équipement en réfrigérateurs est représenté par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par:

$$f(t) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-0,2t}}$$

1. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel α positif tel que $f(\alpha) = 0,97$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement du réel a par deux nombres entiers consécutifs.

   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Partie C

Dans cette partie, on cherche à calculer la moyenne du taux d'équipement en réfrigérateurs entre 1960 et 2000.

1. Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,2t}}{1 + \mathrm{e}^{0,2t}}$.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 40], c'est-à-dire:

$$I = \frac{1}{40}\int_0^{40} \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-0,2t}}\,\mathrm{d}t.$$

   On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au millième.

Exercice 3 — 4 points

Le codage base64 , utilisé en informatique, permet de représenter et de transmettre des messages et d'autres données telles que des images, en utilisant 64 caractères: les 26 lettres majuscules, les 26 lettres minuscules, les chiffres de 0 à 9 et deux autres caractères spéciaux.

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse aux séquences de 4 caractères en base64. Par exemple, gP3g est une telle séquence. Dans une séquence, l'ordre est à prendre en compte: les séquences m5C2 et 5C2m ne sont pas identiques.

1. Déterminer le nombre de séquences possibles.
2. Déterminer le nombre de séquences si l'on impose que les 4 caractères sont différents deux à deux.
3. (a) Déterminer le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule
   (b) En déduire le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule.
   (c) Déterminer le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule.
   (d) Déterminer le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

Partie B

On s'intéresse à la transmission d'une séquence de 250 caractères d'un ordinateur à un autre. On suppose que la probabilité qu'un caractère soit mal transmis est égale à 0,01 et que les transmissions des différents caractères sont indépendantes entre elles. On note X la variable aléatoire égale au nombre de caractères mal transmis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit la loi binomiale. Donner ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que tous les caractères soient bien transmis. *On donnera l'expression exacte, puis une valeur approchée à* 10^{-3} *près*.
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante: La probabilité que plus de 16 caractères soient mal transmis est négligeable?

Partie C

On s'intéresse maintenant à la transmission de 4 séquences de 250 caractères.

On note $X_1,\ X_2,\ X_3$ et X_4 les variables aléatoires correspondant aux nombres de caractères mal transmis lors de la transmission de chacune des 4 séquences.

On admet que les variables aléatoires $X_1,\ X_2,\ X_3$ et X_4 sont indépendantes entre elles et suivent la même loi que la variable aléatoire X définie en partie B.

On note $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

Déterminer, en justifiant, l'espérance et la variance de la variable aléatoire S.

Exercice 4 **4 points**

On se place dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace.

On considère les points A(1 ; 0 ; 3), B$(-2 ; 1 ; 2)$ et C(0 ; 3 ; 2).

1. (a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   (b) Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$ Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC).

   (c) En déduire que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne $-x+y+4z-11=0$.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $3x-3y+2z-9=0$ et le plan $\mathcal{P}'$ d'équation cartésienne $x-y-z+2=0$.

2. (a) Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants. On note (d) leur droite d'intersection.

   (b) Déterminer si les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires.

3. Montrer que la droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

4. Montrer que le point M(2 ; 1 ; 3) appartient aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. En déduire une représentation paramétrique de la droite (d).

5. Montrer que la droite (d) est aussi incluse dans le plan (ABC).

   Que peut-on dire des trois plans (ABC), $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$?