EXERCICE 1 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse inexacte.
Les questions sont indépendantes.

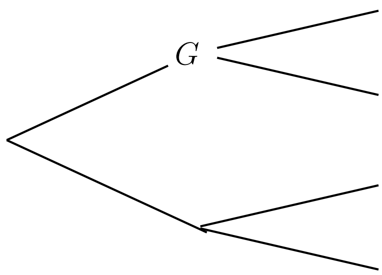
Un technicien contrôle les machines équipant une grande entreprise. Toutes ces machines sont identiques.

On sait que :

- 20 % des machines sont sous garantie;
- 0,2 % des machines sont à la fois défectueuses et sous garantie;
- 8,2 % des machines sont défectueuses.

Le technicien teste une machine au hasard.
On considère les évènements suivants :

- G: la machine est sous garantie ;
- D: la machine est défectueuse ;
- $\overline{G}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les évènements contraires de G et D.



Pour répondre aux questions 1 à 3, on pourra s'aider de l'arbre proposé ci-contre.

1. La probabilité $p_G(D)$ de l'évènement D sachant que G est réalisé est égale à :

   a. 0,002 **b.** 0,01 **c.** 0,024 **d.** 0,2

2. La probabilité $p\left(\overline{G} \cap D\right)$ est égale à :

   a. 0,01 b. 0,08 **c.** 0,1 **d.** 0,21

3. La machine est défectueuse. La probabilité qu'elle soit sous garantie est environ égale, à 10^{-3} près, à :

   a. 0,01 **b.** 0,024 **c.** 0,082 **d.** 0,1

Pour les questions 4 et 5, on choisit au hasard et de façon indépendante n machines de l'entreprise, où n désigne un entier naturel non nul.

On assimile ce choix à un tirage avec remise, et on désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque lot de n machines le nombre de machines défectueuses dans ce lot.

On admet que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,082$.

4. Dans cette question, on prend $n = 50$.

   La valeur de la probabilité $p(X > 2)$, arrondie au millième, est de :

   a. 0,136 **b.** 0,789 **c.** 0,864 d. 0,924

5. On considère un entier n pour lequel la probabilité que toutes les machines d'un lot de taille n fonctionnent correctement est supérieure à $0,4$.

   La plus grande valeur possible pour n est égale à :

   a. 5 **b.** 6 **c.** 10 d. 11

EXERCICE 2 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. On admet que, pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2\left(1 - 8\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$.

   En déduire la limite: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. Montrer que, pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2\left(x^2-4\right)}{x}$.

4. Étudier les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variations complet.

   On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

5. Démontrer que, sur l'intervalle]0 ; 2], l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de α).

6. On admet que, sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de β).

   En déduire le signe de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

7. Pour tout nombre réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par:

   $$g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k.$$

   En s'aidant du tableau de variations de f, déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle la fonction g_k est positive sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 3 **5 points**

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (FAQ) sur son site internet.

On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : Première modélisation

Dans cette partie, on admet que, chaque mois :

- 90 % des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.

Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n-ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3.$$

1. Calculer u_2 et u_3 et proposer une interprétation dans le contexte de l'exercice.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n.$$

3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
4. On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python.

   Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(8.5) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(p) :
    n=1
    u=3
    while u<=p :
        n=n+1
        u=0.9*u+1.3
    return n
```

Partie B : Une autre modélisation

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par:

$$v_n = 9 - 6 \times \mathrm{e}^{-0,19\times(n-1)}.$$

Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n-ième mois sur la FAQ.

1. Préciser les valeurs arrondies au centième de v_1 et v_2.
2. Déterminer, en justifiant la réponse, la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8,5$.

Partie C : Comparaison des deux modèles

1. L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ.

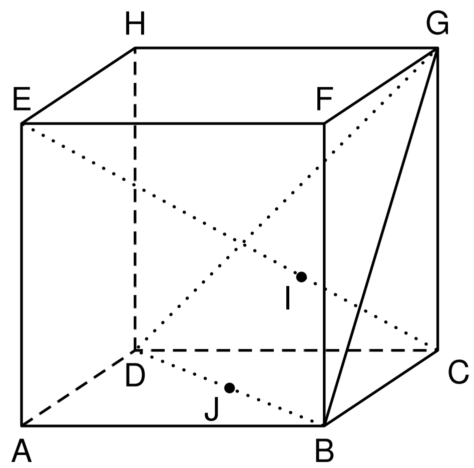
   Parmi ces deux modélisations, laquelle conduit à procéder le plus tôt à cette modification ?

   Justifier votre réponse.

2. En justifiant la réponse, pour quelle modélisation y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme?

EXERCICE 4 **5 points**

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1.
On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC).
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.



1. Donner dans ce repère les coordonnées des points E, C, G.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).
3. Démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD).
4. (a) Justifier qu'une équation cartésienne du plan (GBD) est :

   $$x + y - z - 1 = 0.$$

   (b) Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

   (c) En déduire que la distance du point E au plan (GBD) est égale à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
5. (a) Démontrer que le triangle BDG est équilatéral.

   (b) Calculer l'aire du triangle BDG.
   On pourra utiliser le point J, milieu du segment [BD].
6. Justifier que le volume du tétraèdre EGBD est égal à $\frac{1}{3}$.

   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}Bh$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est la hauteur relative à cette base.