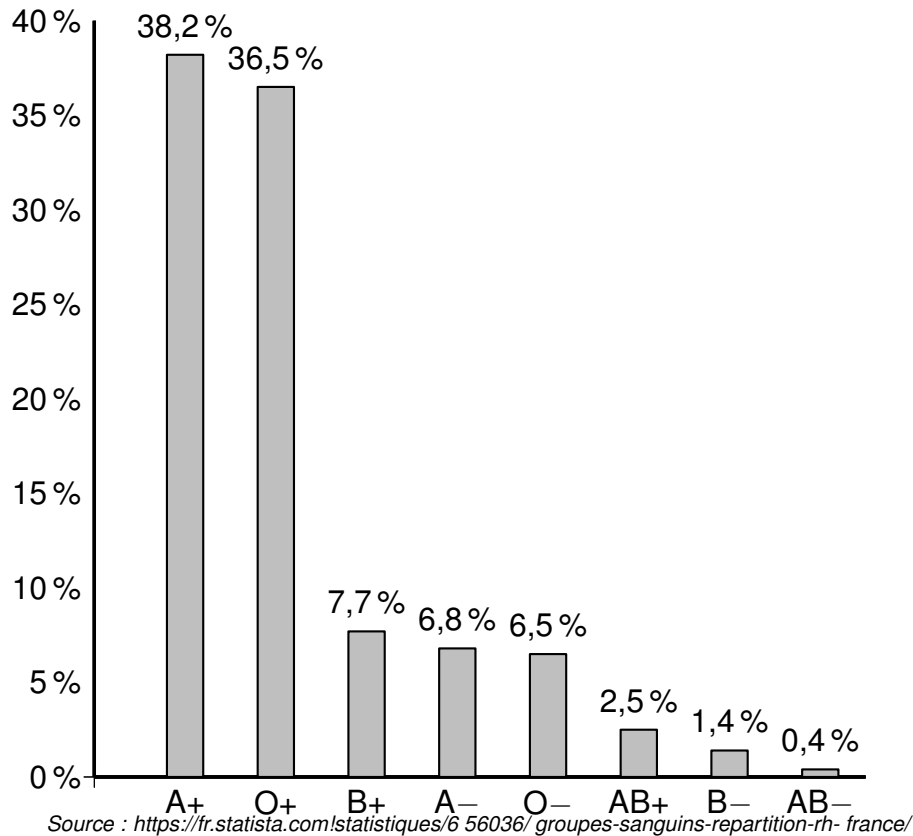


## Exercice 1

5 points

Voici la répartition des principaux groupes sanguins des habitants de France:



A+, O+, B+, A-, O-, AB+, B- et AB- sont les différents groupes sanguins combinés aux rhésus.

Par exemple: A + est le groupe sanguin A de rhésus +.

Une expérience aléatoire consiste à choisir une personne au hasard dans la population française et à déterminer son groupe sanguin et son rhésus.

Dans l'exercice, on adopte les notations du type :

$A +$  est l'évènement la personne est de groupe sanguin A et de rhésus +

$A -$  est l'évènement la personne est de groupe sanguin A et de rhésus -

$A$  est l'évènement la personne est de groupe sanguin A

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

### Partie 1

On note  $Rh$  + l'évènement La personne est de rhésus positif .

1. Justifier que la probabilité que la personne choisie soit de rhésus positif est égale à 0,849.
2. Démontrer à l'aide des données de l'énoncé que  $P_{Rh+}(A) = 0,450$  à 0,001 près.
3. Une personne se souvient que son groupe sanguin est AB mais a oublié son rhésus.  
Quelle est la probabilité que son rhésus soit négatif ? Arrondir le résultat à 0,001 près.

### Partie 2

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 0,001 près.

Un donneur universel de sang est une personne de groupe sanguin O et de rhésus négatif. On rappelle que 6,5 % de la population française est de groupe O−.

1. On considère 50 personnes choisies au hasard dans la population française et on note  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de donneurs universels.
  - (a) Déterminer la probabilité que 8 personnes soient des donneurs universels. Justifier votre réponse.
  - (b) On considère la fonction ci-dessous nommée `proba` d'argument `k` écrite en langage Python.

```
def proba(k):
    p=0
    for i in range(k+1):
        p = p + binomiale(i,50,0.065)
    return p
```

Cette fonction utilise la fonction binomiale d'argument  $i$ ,  $n$  et  $p$ , créée pour l'occasion, qui renvoie la valeur de la probabilité  $P(X = i)$  dans le cas où  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . Déterminer la valeur numérique renvoyée par la fonction `proba` lorsqu'on saisit `proba(8)` dans la console Python. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Quel est le nombre minimal de personnes à choisir au hasard dans la population française pour que la probabilité qu'au moins une des personnes choisies soit donneur universel, soit supérieure à 0,999.

## Exercice 2

**5 points**

Cet exercice contient 5 affirmations.

Pour chaque affirmation, répondre par VRAI ou FAUX en justifiant la réponse.

Toute absence de justification ou justification incorrecte ne sera pas prise en compte dans la notation.

### Partie 1

On considère la suite  $(u_n)$  définie par:

$$u_0 = 10 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2.$$

1. **Affirmation 1** : La suite  $(u_n)$  est décroissante minorée par 0.
2. **Affirmation 2** :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
3. **Affirmation 3** : La suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = u_n - 3$  est géométrique.

## Partie 2

On considère l'équation différentielle  $(E)$  :  $y' = \frac{3}{2}y + 2$  d'inconnue  $y$ , fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$

1. **Affirmation 4** : Il existe une fonction constante solution de l'équation différentielle  $(E)$ .
2. Dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  on note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$  solution de  $(E)$  telle que  $f(0) = 0$ .
3. **Affirmation 5** : La tangente au point d'abscisse 1 de  $\mathcal{C}_f$  a pour coefficient directeur  $2e^{\frac{3}{2}}$ .

## Exercice 3

**5 points**

### Partie 1

On considère la fonction  $f$  définie sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (x^2 - 4)e^{-x}.$$

On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
2. Justifier que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = (-x^2 + 2x + 4)e^{-x}$ .
3. En déduire les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Partie 2

On considère la suite  $(I_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $I_n = \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx$ .

1. Justifier que  $I_0 = e^2 - 1$ .
2. En utilisant une intégration par partie, démontrer l'égalité :

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1}e^2 + (n+1)I_n.$$

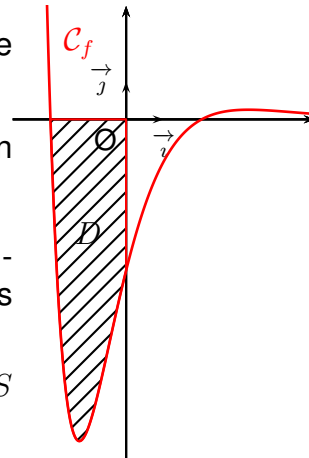
3. En déduire les valeurs exactes de  $I_1$  et de  $I_2$ .

### Partie 3

- Déterminer le signe sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f$  définie dans la partie 1.
- On a représenté ci-contre la courbe  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Le domaine  $D$  du plan hachuré ci-contre est délimité par la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire  $S$  du domaine  $D$ .

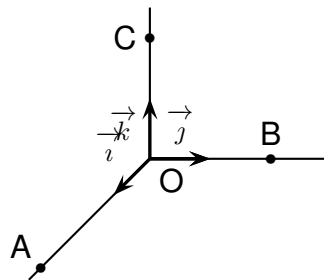


### Exercice 4

5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les trois points  $A(3; 0; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$  et  $C(0; 0; 2)$ .



L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété suivante :

Le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre OABC ,

#### Partie 1 : Distance du point O au plan (ABC)

- Démontrer que le vecteur  $\vec{n}(2; 3; 3)$  est normal au plan (ABC).
- Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :  $2x + 3y + 3z - 6 = 0$ .
- Donner une représentation paramétrique de la droite  $d$  passant par O et de vecteur directeur  $\vec{n}$ .
- On note H le point d'intersection de la droite  $d$  et du plan (ABC).  
Déterminer les coordonnées du point H.
- En déduire que la distance du point O au plan (ABC) est égale à  $\frac{3\sqrt{22}}{11}$ .

#### Partie 2 : Démonstration de la propriété

1. Démontrer que le volume du tétraèdre OABC est égal à 2.
2. En déduire que l'aire du triangle ABC est égale à  $\sqrt{22}$ .
3. Démontrer que pour le tétraèdre OABC, le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre .

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par  $V = \frac{1}{3}B \times h$  où  $B$  est l'aire d'une base du tétraèdre et  $h$  est la hauteur relative à cette base.