Exercice 1 — 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est juste ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : Soit (E) l'équation différentielle : $y' - 2y = -6x + 1$.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 6x + 1$ est une solution de l'équation différentielle (E).

Affirmation 2 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

La suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

Affirmation 3 : On considère la suite (u_n) définie dans l'affirmation 2.
L'instruction `suite(50)` ci-dessous, écrite en langage Python, renvoie u_{50}.

```python
def suite(k):
  S=0
  for i in range(k):
    S=S+(3/4)**k
  return S
```

Affirmation 4 : Soit a un réel et f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = a\ln(x) - 2x.$$

Soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Il existe une valeur de a pour laquelle la tangente à C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 2 — 5 points

Au cours d'une séance, un joueur de volley-ball s'entraîne à faire des services. La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,85.

On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées:

- si le joueur réussit un service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant est égale à 0,6;
- si le joueur ne réussit pas un service, alors la probabilité qu'il ne réussisse pas le suivant est égale à 0,6.

Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement le joueur réussit le n-ième service et $\overline{R_n}$ l'évènement contraire.

Partie A

On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité de l'évènement R_2 est égale à 0,57.
3. Sachant que le joueur a réussi le deuxième service, calculer la probabilité qu'il ait raté le premier.
4. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de services réussis au cours des deux premiers services.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de Z (on pourra utiliser l'arbre pondéré de la question 1).
   (b) Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(Z)$ de la variable aléatoire Z.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On s'intéresse maintenant au cas général.

Pour tout entier naturel n non nul, on note x_n la probabilité de l'évènement R_n.

1. (a) Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}\left(R_{n+1}\right)$ et $P_{\overline{R_n}}\left(\overline{R_{n+1}}\right)$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $x_{n+1} = 0,2x_n + 0,4$.
2. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = x_n - 0,5$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.
   (b) Déterminer l'expression de x_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (x_n).
   (c) Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 — 7 points

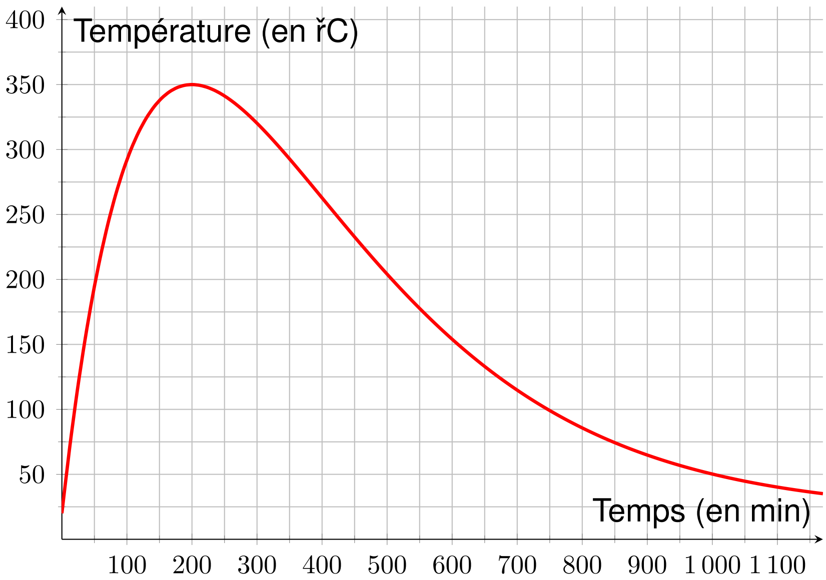
Un organisme certificateur est missionné pour évaluer deux appareils de chauffage, l'un d'une marque A et l'autre d'une marque B.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : appareil de la marque A

À l'aide d'une sonde, on a mesuré la température à l'intérieur du foyer d'un appareil de la marque A.

On a représenté, ci-dessous, la courbe de la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer en fonction du temps écoulé, exprimé en minutes, depuis l'allumage du foyer.



Par lecture graphique :

1. Donner le temps au bout duquel la température maximale est atteinte à l'intérieur du foyer.

2. Donner une valeur approchée, en minutes, de la durée pendant laquelle la température à l'intérieur du foyer dépasse 300 C.

3. On note f la fonction représentée sur le graphique.

   Estimer la valeur de $\dfrac{1}{600}\displaystyle\int_0^{600} f(t)$ṭ. Interpréter le résultat.

Partie 2 : étude d'une fonction

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(t) = 10t\mathrm{e}^{-0{,}01t} + 20.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. (a) Montrer que pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[, \quad g'(t) = (-0,1t + 10)\mathrm{e}^{-0{,}01t}$.

   (b) Étudier les variations de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$ et construire son tableau de variations.

3. Démontrer que l'équation $g(t) = 300$ admet exactement deux solutions distinctes sur $[0\ ;\ +\infty[$. En donner des valeurs approchées à l'unité.

4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^{600} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie 3 : évaluation

Pour un appareil de la marque B, la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer t minutes après l'allumage est modélisée sur $[0\ ;\ 600]$ par la fonction g.

L'organisme certificateur attribue une étoile par critère validé parmi les quatre suivants :

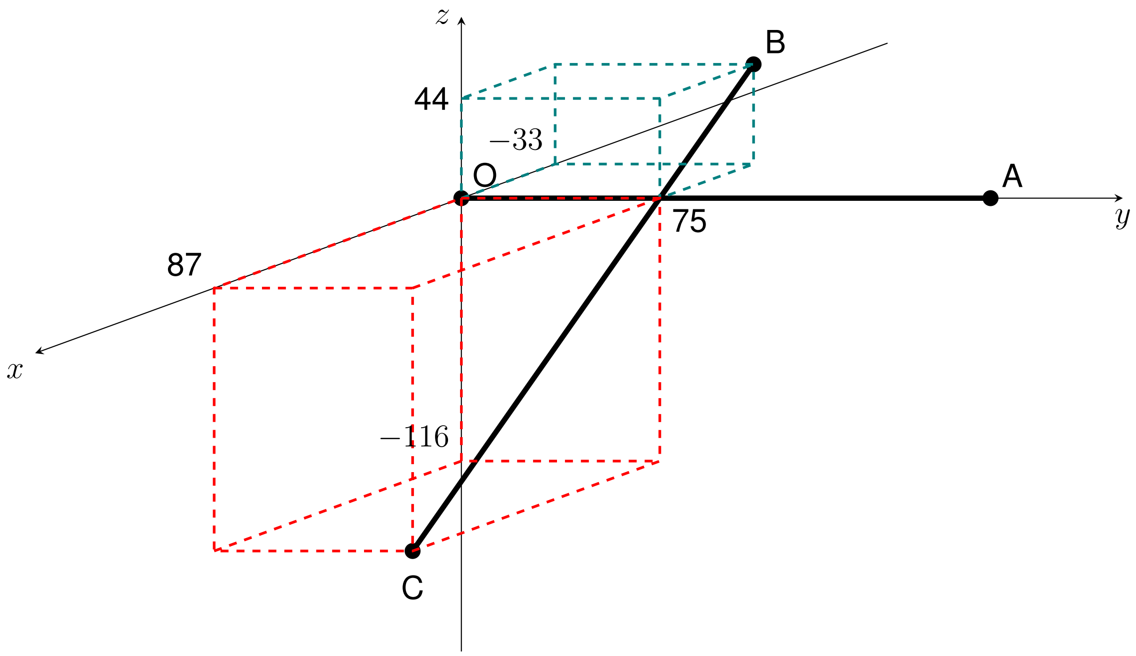
- Critère 1 : la température maximale est supérieure à 320 C.
- Critère 2 : la température maximale est atteinte en moins de 2 heures.
- Critère 3 : la température moyenne durant les 10 premières heures après l'allumage dépasse 250 C.
- Critère 4 : la température à l'intérieur du foyer ne doit pas dépasser 300 C pendant plus de 5 heures.

Chaque appareil obtient-il exactement trois étoiles ? Justifier votre réponse.

Exercice 4 — 4 points

On modélise un passage de spectacle de voltige aérienne en duo de la manière suivante :

- on se place dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, une unité représentant un mètre;
- l'avion no 1 doit relier le point O au point $\text{A}(0\ ;\ 200\ ;\ 0)$ selon une trajectoire rectiligne, à la vitesse constante de $200\,\text{m/s}$;
- l'avion no 2 doit, quant à lui, relier le point $\text{B}(-33\ ;\ 75\ ;\ 44)$ au point $\text{C}(87\ ;\ 75\ ;\ -116)$ également selon une trajectoire rectiligne, et à la vitesse constante de $200\,\text{m/s}$.
- au même instant, l'avion 1 est au point O et l'avion 2 est au point B.



1. Justifier que l'avion 2 mettra autant de temps à parcourir le segment [BC] que l'avion 1 à parcourir le segment [OA].
2. Montrer que les trajectoires des deux avions se coupent.
3. Les deux avions risquent-ils de se percuter lors de ce passage ?