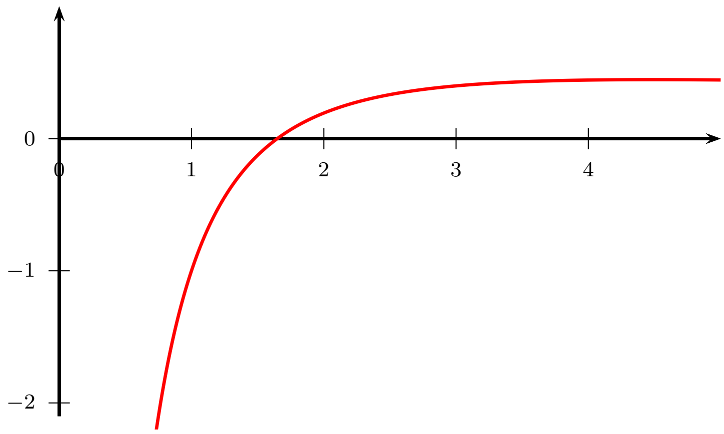
Principaux domaines abordés :
Fonction logarithme, limites, dérivation.

Partie 1

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par:

$$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}.$$



1. Déterminer par le calcul l'unique solution α de l'équation $f(x) = 0$.
   On donnera la valeur exacte de α ainsi que la valeur arrondie au centième.
2. Préciser, par lecture graphique, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie II

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par:

$$g(x) = [\ln(x)]^2 - \ln(x).$$

1. (a) Déterminer la limite de la fonction g en 0.
   (b) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, on a : $g'(x) = f(x)$, où f désigne la fonction définie dans la partie I.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   On fera figurer dans ce tableau les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$, ainsi que la valeur du minimum de g sur $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Démontrer que, pour tout nombre réel $m > -0,25$, l'équation $g(x) = m$ admet exactement deux solutions.
5. Déterminer par le calcul les deux solutions de l'équation $g(x) = 0$.