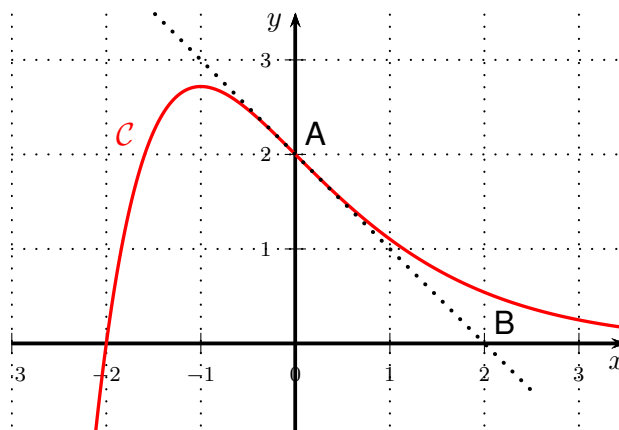


EXERCICE A

Principaux domaines abordés : Fonction exponentielle, convexité, dérivation, équations différentielles

Cet exercice est composé de trois parties indépendantes.

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative \mathcal{C} d'une fonction f définie sur \mathbb{R} :



On considère les points $A(0 ; 2)$ et $B(2 ; 0)$.

Partie 1

Sachant que la courbe \mathcal{C} passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe \mathcal{C} au point A , donner par lecture graphique :

1. La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.
2. Un intervalle sur lequel la fonction f semble convexe.

Partie 2

On note (E) l'équation différentielle

$$y' = -y + e^{-x}.$$

On admet que $g : x \mapsto xe^{-x}$ est une solution particulière de (E) .

1. Donner toutes les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $(H) : y' = -y$.
2. En déduire toutes les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (E) .
3. Sachant que la fonction f est la solution particulière de (E) qui vérifie $f(0) = 2$, déterminer une expression de $f(x)$ en fonction de x .

Partie 3

On admet que pour tout nombre réel x , $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$.

(b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de f sur \mathbb{R} .

On ne précisera ni la limite de f en $-\infty$ ni la limite de f en $+\infty$.

On calculera la valeur exacte de l'extremum de f sur \mathbb{R} .

2. On rappelle que f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f .

(a) Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

(b) Peut-on affirmer que f est convexe sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$?