

## Commun à tous les candidats

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1,000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi: chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $u_n$  le nombre d'abonnés à son profil en l'année  $(2020 + n)$ , suivant cette modélisation. Ainsi  $u_0 = 1,000$ .

1. Calculer  $u_1$ .
2. Justifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$ .
3. La fonction Python nommée suite est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par suite(10).

```
def suite( n ) :
    u = 1,000
    for i in range(n) :
        u = 0,9*u + 250
    return u
```

4. (a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq 2,500$ .  
 (b) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.  
 (c) Déduire des questions précédentes que la suite  $(u_n)$  est convergente.
5. Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_n = u_n - 2,500$  pour tout entier naturel  $n$ .  
 (a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial  $v_0 = -1,500$ .  
 (b) Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$  et montrer que :

$$u_n = -1,500 \times 0,9^n + 2,500.$$

- (c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  et interpréter dans le contexte de l'exercice.
6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2,200.  
 Déterminer cette année.