Exercice 5

Principaux domaines abordés :
Équations différentielles ; fonction exponentielle.

On considère léquation différentielle

$$(E) \quad y' = y + 2x\mathrm{e}^x$$

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2\mathrm{e}^x$. On admet que u est dérivable et on note u' sa fonction dérivée. Démontrer que u est une solution particulière de (E).

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - u(x)$$

   (a) Démontrer que si la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) alors la fonction g est solution de l'équation différentielle: $y' = y$.
   On admet que la réciproque de cette propriété est également vraie.

   (b) À l'aide de la résolution de l'équation différentielle $y' = y$, résoudre l'équation différentielle (E).

3. Étude de la fonction u

   (a) Étudier le signe de $u'(x)$ pour x variant dans $\mathbb{R}$.

   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction u sur $\mathbb{R}$ (les limites ne sont pas demandées).

   (c) Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction u est concave.