Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. (a) Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (b) Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a :
   $$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$$
   où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.
4. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.
   On note A un éventuel point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.
   (a) Montrer que a est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1) + x^2 = 0$.
   On note g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + x^2$.
   On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.
   (b) Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.