Exercice 5

Principaux domaines abordés:
Fonction logarithme.

Partie I

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par:

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction h en 0.
2. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.
3. On note h' la fonction dérivée de h. Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, on a:

$$h'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
5. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\ ;\ +\infty[$.
   Justifier que l'on a : $0,5 < \alpha < 0,6$.

Partie II

Dans cette partie, on considère les fonctions f et g définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

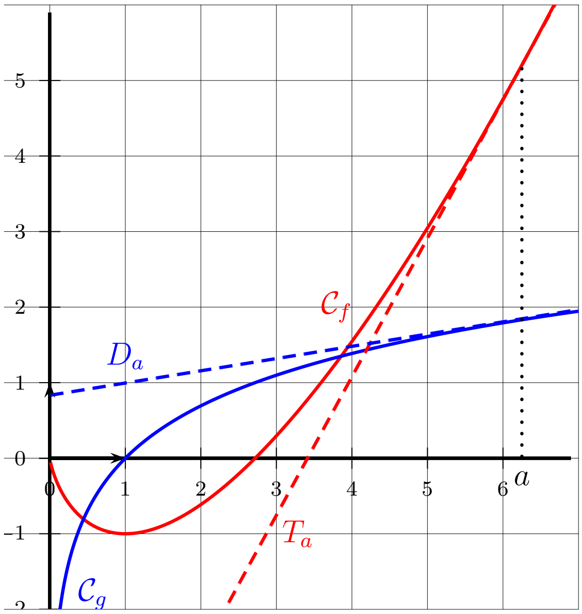
$$f(x) = x\ln(x) - x; \qquad g(x) = \ln(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Pout tout nombre réel a strictement positif, on appelle:

- T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse a ;
- D_a la tangente à $\mathcal{C}_g$ en son point d'abscisse a.

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ainsi que deux tangentes T_a et D_a sont représentées ci-dessous.



On recherche d'éventuelles valeurs de a pour lesquelles les droites T_a et D_a sont perpendiculaires. Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Justifier que la droite D_a a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{a}$.
2. Justifier que la droite T_a a pour coefficient directeur $\ln(a)$.

On rappelle que dans un repère orthonormé, deux droites de coefficients directeurs respectifs m et m'sont perpendiculaires si et seulement si $mm' = -1$.

3. Démontrer qu'il existe une unique valeur de a, que l'on identifiera, pour laquelle les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.