Principaux domaines abordés : Fonction logarithme ; dérivation.

Partie I: Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) + 2x - 2.$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et 0.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie II : Étude d'une fonction f

On considère la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par:

$$f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1).$$

1. (a) On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa dérivée.
   Démontrer que, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a :

   $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$. Le calcul des limites n'est pas demandé.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ puis dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie III : Étude d'une fonction F admettant pour dérivée la fonction f

On admet qu'il existe une fonction F dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ dont la dérivée F' est la fonction f.
Ainsi, on a : $F' = f$.
On note $\mathcal{C}_F$ la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$. On ne cherchera pas à déterminer une expression de $F(x)$.

1. Étudier les variations de F sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. La courbe $\mathcal{C}_F$ représentative de F admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ?
   Justifier la réponse.