Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$ par:

$$f(x)=\frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=\frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$.

1. Calculer u_1.

2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\frac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 2$.

   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   (c) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

3. (a) Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur P tel que : $1-u_P<E$.

```
def seuil(E):
    u = 0,5
    n = 0
    while ............................
        u = ............................
        n = n + 1
    return n
```

   (b) Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E=10^{-4}$.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n=\frac{u_n}{1-u_n}$$

   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
   En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n=\frac{v_n}{v_n+1}$.

   (c) Montrer alors que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n=\frac{1}{1+0,25^n}.$$

   Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n).