Principaux domaines abordés Équations différentielles Fonction exponentielle ; suites

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225 °C.

On sintéresse à lévolution de la température dune baguette après sa sortie du four.

On admet quon peut modéliser cette évolution à laide dune fonction f définie et dérivable sur lintervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four.

Ainsi, $f(0,5)$ représente la température dune baguette une demi-heure après la sortie du four.

Dans tout lexercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25 °C.

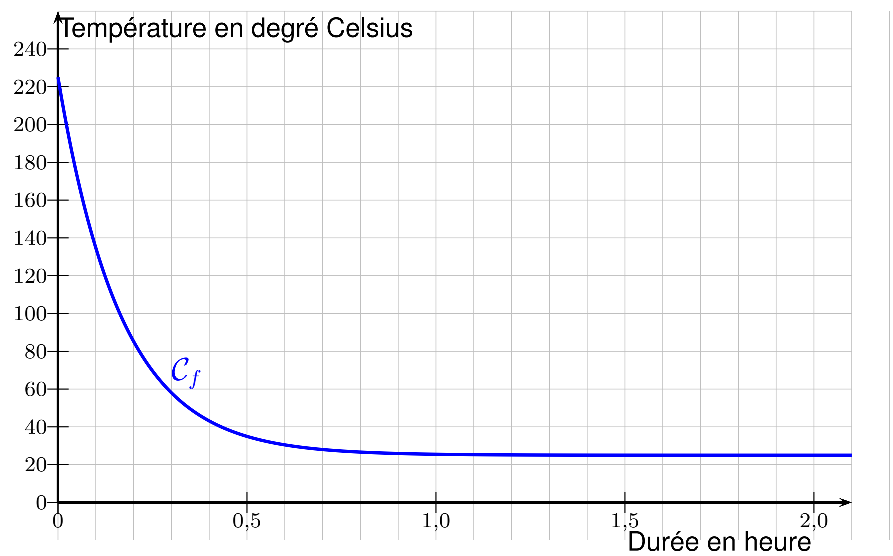
On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

1. (a) Préciser la valeur de $f(0)$.
   (b) Résoudre léquation différentielle $y' + 6y = 150$.
   (c) En déduire que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $f(t) = 200\mathrm{e}^{-6t} + 25$.
2. Par expérience, on observe que la température dune baguette sortant du four :
   - décroît ;
   - tend à se stabiliser à la température ambiante.

   La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?
3. Montrer que léquation $f(t) = 40$ admet une unique solution dans $[0\ ;\ +\infty[$.

   Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40 °C. On note T_0 le temps dattente minimal entre la sortie du four dune baguette et sa mise en rayon.

   On donne en page suivante la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.



4. Avec la précision permise par le graphique, lire $\mathcal{T}_0$. On donnera une valeur approchée de $\mathcal{T}_0$ sous forme dun nombre entier de minutes.

5. On sintéresse ici à la diminution, minute après minute, de la température dune baguette à sa sortie du four.

   Ainsi, pour un entier naturel n, $\mathcal{D}_n$ désigne la diminution de température en degré Celsius dune baguette entre la n-ième et la $(n+1)$-ième minute après sa sortie du four.

   On admet que, pour tout entier naturel n :

$$\mathcal{D}_n = f\left(\frac{n}{60}\right) - f\left(\frac{n+1}{60}\right).$$

   (a) Vérifier que 19 est une valeur approchée de $\mathcal{D}_0$ à 0,1 près, et interpréter ce résultat dans le contexte de lexercice.

   (b) Vérifier que lon a, pour tout entier naturel n:

$$\mathcal{D}_n = 200\mathrm{e}^{-0,1n}\left(1-\mathrm{e}^{-0,1}\right).$$

   En déduire le sens de variation de la suite $(\mathcal{D}_n)$, puis la limite de la suite $(\mathcal{D}_n)$.

   Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de lexercice ?