Commun à tous les candidats

Au 1er janvier 2020, la centrale solaire de Big Sun possédait 10,560 panneaux solaires.

On observe, chaque année, que 2 % des panneaux se sont détériorés et nécessitent d'être retirés tandis que 250 nouveaux panneaux solaires sont installés.

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

On modélise l'évolution du nombre de panneaux solaires par la suite (u_n) définie par $u_0 = 10{,}560$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux solaires au 1er janvier de l'année $2020 + n$.

1. (a) Expliquer en quoi cette modélisation correspond à la situation étudiée.

   (b) On souhaite savoir au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 12,000.
   À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

   (c) Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10,560
n= 0
while ......:
    u = ......
    n = ......
```

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 12{,}500$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. En déduire que la suite (u_n) converge. Il n'est pas demandé, ici, de calculer sa limite.

5. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 12{,}500$, pour tout entier naturel n.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,98$ dont on précisera le premier terme.

   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

   (d) Déterminer la limite de la suite (u_n).
   Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

Une modélisation plus précise a permis d'estimer le nombre de panneaux solaires de la centrale à l'aide de la fonction f définie pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 12{,}500 - 500\mathrm{e}^{-0{,}02x+1{,}4},$$

où x représente le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2020.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. En utilisant ce modèle, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires dépassera 12,000.